



Open Access

引用格式:许易坤, 薛春霞. 柔性压电薄板在温度效应下的非线性主共振 [J]. 海南大学学报(自然科学版中英文), DOI: 10.65658/j.hndk.2025081601.

Citation: Xu Yikun, Xue Chunxia. Nonlinear principal resonance of a flexible piezoelectric thin plate under temperature effects[J]. Natural Science of Hainan University, DOI: 10.65658/j.hndk.2025081601.

柔性压电薄板在温度效应下的非线性主共振

许易坤^{ID}, 薛春霞^{ID}✉

(海南大学 土木建筑工程学院, 海南 海口 570228)

摘要: 探究了不同温度效应对柔性压电薄板非线性主共振变化的影响。依据 von-Kármán 板大挠度理论, 结合弹性力学有限变形基础理论及 Bubnov-Galerkin 原理, 推导出了系统的非线性振动方程与协调方程。通过平均法, 获得了柔性压电薄板在主共振条件下的幅频响应方程。根据 Routh-Hurwitz 稳定判据, 对系统解的稳定性进行了分析, 并利用仿真软件进行了数值模拟, 以探讨不同参数(板厚度、长宽比、外激励和温度差)对薄板主共振响应的影响。结果表明: 在(1, 1)模态下, 解的不稳定区域较为显著, 而在(2, 1)和(1, 2)模态下则有所减小。外激励的增大导致系统幅值相应增加; 随着温度、板厚度或长宽比的增加, 系统幅值则减小。在主共振状态下, 柔性压电薄板存在 2 个鞍结分岔点。2 个跳跃节点之外的部分对应系统的单值响应, 而 2 个跳跃节点之间的部分则对应三值响应, 包含 2 个稳定解和一个不稳定解。2 个稳定节点周围的轨迹呈现收敛状态, 而另一个鞍点周围的轨迹则呈发散状态。

关键词: 柔性压电薄板; 平均法; 非线性主共振; 温度效应; 多解共存

中图分类号: O322 文献标志码: A

DOI: 10.65658/j.hndk.2025081601 CSTR: 32403.14.hndk.2025081601

Nonlinear principal resonance of a flexible piezoelectric thin plate under temperature effects

Xu Yikun^{ID}, Xue Chunxia^{ID}✉

(School of Civil Engineering and Architecture, Hainan University, Haikou 570228, China)

Abstract: This study investigates the variation of nonlinear primary resonance in flexible piezoelectric plates under different thermal effects. Based on the von-Kármán large-deflection plate theory, the nonlinear vibration equations and the associated compatibility equations are derived using the fundamental principles of finite deformation elasticity in conjunction with the Bubnov-Galerkin method. The averaging method is subsequently applied to obtain the amplitude-frequency response equation for the plate under primary resonance conditions. The stability of the obtained solutions is analyzed using the Routh-Hurwitz stability criterion. Numerical simulations are performed in MATLAB to explore the influence of various parameters, including plate thicknesses, aspect ratios, external excitations, and temperature difference, on the primary resonance response, with corresponding amplitude-frequency response curves presented accordingly. The results show that the instability region of the solution is more pronounced in the (1,1) mode, whereas it diminishes in the (2,1) and

Received: 2025-08-16; **Revised:** 2026-04-12; **Accepted:** 2026-04-13.

✉ **Corresponding author(s):** Xue Chunxia, E-mail: xuechunxia@hainanu.edu.cn.

(1,2) modes. The response amplitude increases with greater external excitation, but decreases with rising temperature, plate thickness, or aspect ratio. Under primary resonance, two saddle-node bifurcation points exist. Outside the interval between these two jump points, the system exhibits a single-valued response; within the interval, a triple-valued response emerges, consisting of two stable solutions and one unstable solution. The trajectories near the two stable points converge, whereas the remaining point is a saddle point, around which the trajectories diverge.

Keywords: flexible piezoelectric thin plates; average method; nonlinear principal resonance; thermal effect; coexistence of multiple solutions

0 引言

压电材料作为一种能够实现电能与机械能相互转换的材料^[1-2], 凭借其独特性能, 在医疗、生物医学、信息技术、工业、工程等诸多领域得到广泛应用^[3]。经典的硅基电子材料具有较强的刚性, 在柔性、可穿戴等新兴应用场景中存在一定局限性。为满足不断多元化的应用需求, 压电材料的柔性化研究成为新的发展趋势。柔性压电材料与经典刚性压电材料的核心差异在于其具备可弯曲、可伸缩等特性, 在部分工作场景中具有明显优势^[4]。

聚偏氟乙烯作为一种典型的柔性压电材料, 在机械强度、韧性、热稳定性和压电响应灵敏度方面展现出优异性能, 使其成为压电材料领域的研究重点^[5]。围绕其工程应用潜力, 研究不断深入。郭弦等^[6]针对混凝土内部动态测量的实际需求, 开发了基于软基底的聚偏氟乙烯压力传感器。Zhang 等^[7]为提高传感器灵敏度, 开发了一种基于聚偏氟乙烯纳米纤维的柔性压电传感器。王旭^[8]在锂离子电池隔膜制备与性能研究中指出, 聚偏氟乙烯材料具有高熔点且各向同性的特点。孙飞等^[9]利用聚偏氟乙烯薄膜传感器对岩石表面爆炸应力进行测量, 并分析了炮孔内不同填塞介质对爆炸应力波在岩石中传播的影响。

总体而言, 基于聚偏氟乙烯的柔性压电器件在工程监测与实际应用中已获得广泛关注, 并展现出良好的应用前景。然而, 实际工况常涉及多物理场耦合环境^[10]。与单一物理场相比, 多物理场耦合作用显著增加了材料与结构响应的复杂性, 其中温度场的影响尤为显著。在温度场与结构的耦合作用下, 温度的持续变化会导致结构变形, 而结构变形又会反过来影响温度场的分布, 形成双向耦合效应^[11-12]。针对多物理场耦合问题, 已有学者展开了相关研究。侯艳青等^[13]针对压电晶片在低温下的应用需求, 研究了不同频率条件下多种压电材料的机电性能。王勋^[14]以压电陶瓷-金属-压电陶瓷对称层合结构为研究对象, 探讨了热弹耦合作用下矩形压电薄板的主共振与混沌运动特性。Guo 等^[15]探讨了热环境中压电夹层梁的几何线性和非线性频率。程立平^[16]基于经典梁理论与层合板理论, 分析了含压电材料的复合梁及层合板在电场作用下的变形行为。Chai^[17]以锥形圆柱壳体为研究对象, 探讨了其在热环境及螺栓边界约束条件下的非线性振动响应。孟莹等^[18]针对压电圆形薄板, 分析了热弹耦合作用下的非线性动力学行为, 并系统探讨了板中心温度、机械载荷、系统阻尼及板厚等参数对系统非线性特性及稳态解稳定性的影响。Zhang 等^[19]提出了一种新型有限元动力学建模方法, 并将其应用于柔性智能梁的鲁棒主动振动控制研究。现有针对“温度-压电-非线性振动”耦合问题的研究多集中于刚性压电材料, 针对柔性压电材料在温度效应下的非线性主共振研究, 仍较为有限。对于柔性压电材料的多场耦合行为, 部分学者已进行初步探索。Shen 等^[20]采用柔性压电复合材料铅钛酸铅-聚二甲基硅氧烷进行相场模拟, 从空间和时间 2 个尺度研究其电学和机械响应。Lyu 等^[21]提出了柔性压电材料的有限变形相场断裂模型, 建立了电-机械-相场耦合控制方程, 并通过与解析解及已有文献结果的比较验证了模型的有效性。Xia 等^[22]对柔性压电材料进行了多尺度仿真, 提出了一种机电耦合关系模型。然而, 上述研究主要集中于柔性压电材料的压电性能与力学响应, 尚未充分考虑温度场的影响。此外, Pervaiz 等^[23]采用共沉淀法合成复合柔性片作为高稳定介电材料, 分析了其热学和介电特性, 但未涉及非线性振动行为。Zhang 等^[24]构建了

智能航天器仿真与控制的二维刚-柔-热-电耦合动力学模型, 并采用 PID 控制算法研究柔性部件的主动振动抑制问题, 但未针对柔性结构的大变形特性展开深入分析。

综上所述, 当前在压电结构多场耦合分析方面虽已取得一定成果, 但针对柔性压电薄板在温度场作用下的非线性主共振机理尚缺乏系统研究。本文在现有研究的基础上, 针对压电材料薄板结构在外激励和温度场共同作用下的动力学问题, 采用弹性力学有限变形基础理论、Bubnov-Galerkin 原理及平均法, 构建了柔性压电薄板的非线性振动控制方程及协调方程, 并推导其在主共振条件下的幅频响应方程。最后, 利用仿真软件对系统解析进行数值算例分析, 揭示温度场、板厚度、外激励及长宽比等关键参数对结构非线性动力学特性及振动响应幅值的影响规律, 为柔性压电结构在复杂热环境中的工程应用提供理论依据。

1 柔性压电材料矩形薄板的基本方程

柔性薄板的基本假设: 其材料为连续、均匀、各向同性的线弹性材料; 变形前垂直于中面的直线在变形后保持直线且垂直于中面; 忽略沿中面垂直方向的法向应力; 材料中无自由电荷, 且薄板厚度远小于其长度和宽度。

以压电矩形薄板为研究对象, 设定其一顶点为坐标原点 O , 薄板的两边分别在水平方向 x 轴和 y 轴上, 法线方向坐标轴为 z 轴, 建立坐标系如图 1 所示。该薄板的长度 $a = 300 \text{ mm}$, 宽度 $b = 250 \text{ mm}$, 厚度 $h = 10 \text{ mm}$, 且其上表面受到均布载荷 $q = q_0 \cos \omega t$ 。其中 q_0 为外激励幅值, ω 为激振频率。

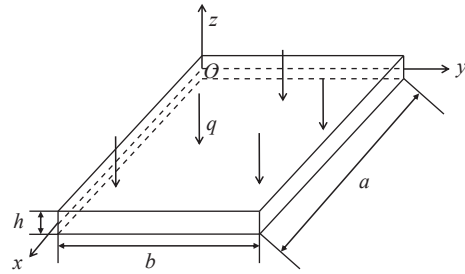


图 1 柔性压电薄板受力图

各向同性的压电矩形薄板, 在考虑温度效应时的本构方程^[25-26] 为

$$\begin{cases} \sigma_x = \frac{E}{1-\mu^2} (\varepsilon_x + \mu\varepsilon_y) - e_{31}E_z - \lambda_{11}T \\ \sigma_y = \frac{E}{1-\mu^2} (\varepsilon_y + \mu\varepsilon_x) - e_{31}E_z - \lambda_{11}T \\ \tau_{xy} = \frac{E}{2(1+\mu)} \gamma_{xy} \\ D_z = e_{31}(\varepsilon_x + \varepsilon_y) + \varepsilon_{33}E_z + m_{33}T \\ S_z = \lambda_{11}(\varepsilon_x + \varepsilon_y) + m_{33}E_z + \delta T \end{cases} \quad (1)$$

式中, σ_x 、 σ_y 为 x 和 y 方向正应力; E 为弹性模量; μ 为泊松比; ε_x 、 ε_y 为 x 和 y 方向正应变; e_{31} 为压电系数; λ_{11} 为热-机械耦合系数; τ_{xy} 为切应力; γ_{xy} 为切应变; D_z 为电位移; ε_{33} 为介电系数; E_z 为电场强度; m_{33} 为热-压电耦合系数; T 为温度; S_z 为熵; $\delta = c/T_0$, c 为比热容, T_0 为初始温度。

根据 von-Kármán 板大挠度理论, 可得薄板的几何方程^[27], 并进一步推导得到薄板的内力和薄板弯矩。引入应力函数 ϕ 并考虑阻尼力, 可推导出压电矩形薄板的运动方程, 将内力和弯矩结合式代入到运动方程里面, 得到柔性压电矩形薄板的横向振动方程:

$$D\nabla^4 w + \nabla^2 M_E + \nabla^2 M_T = h \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) + q - \alpha \frac{\partial w}{\partial t} - \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \quad (2)$$

式中, $D = \frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)}$; $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$, $\nabla^4 = \frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^4}$; w 为柔性压电矩形薄板的横向位移; $M_E = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (e_{31}E_z) dz$ 为电弯矩, $M_T = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (\lambda_{11}T) dz$ 为热弯矩; x , y 为空间变量; t 为时间; ρ 为质量密度; α 为阻尼系数。

薄板的动态平衡方程^[28]中由于薄板的厚度很小, x 和 y 方向的电场和熵忽略不计^[29], 可得 $D_z = 0$, $S_z = 0$ 。因此可得

$$\frac{M_E}{M_T} = \frac{e_{31}(\delta e_{31} - m_{33}\lambda_{11})}{\lambda_{11}(\varepsilon_{33}\lambda_{11} - m_{33}e_{31})} \quad (3)$$

将几何方程结合式(1)代入到矩形薄板的应变相容方程^[27]内, 可得矩形薄板的协调方程为

$$\frac{\nabla^4 \varphi}{E} = \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \quad (4)$$

2 非线性振动解与稳定性分析

不考虑电场和温度的变化对薄板边界条件的影响, 可得四边简支下的边界条件为

$$\begin{cases} x=0, a \text{ 时, } & w=0, \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}=0 \\ y=0, b \text{ 时, } & w=0, \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}=0 \end{cases} \quad (5)$$

将柔性压电矩形薄板的横向位移 w 设为

$$w(x, y, t) = X(t) \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \quad (6)$$

式中, $X(t)$ 为板中心无量纲挠度, m 和 n 分别为沿 x 方向和 y 方向的模态阶数。

将式(6)代入式(4)可求得应力函数为

$$\varphi = \frac{E}{32} X^2(t) \left[\left(\frac{an}{bm} \right)^2 \cos \frac{2m\pi x}{a} + \left(\frac{bm}{an} \right)^2 \cos \frac{2n\pi y}{b} \right] \quad (7)$$

将式(6)和式(7)代入式(3)可得振型函数为

$$\begin{aligned} L(w) = & \frac{h^3}{12} X(t) \left(\frac{E}{1-\mu^2} + e_{31} \frac{\delta e_{31} - m_{33}\lambda_{11}}{\delta \varepsilon_{33} - m_{33}^2} + \lambda_{11} \frac{\varepsilon_{33}\lambda_{11} - m_{33}e_{31}}{\delta \varepsilon_{33} - m_{33}^2} \right) \left[\left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 \right]^2 \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) - \\ & \frac{hE}{8} X^3(t) \left[\left(\frac{m\pi}{a} \right)^4 \cos \frac{2n\pi y}{b} + \left(\frac{n\pi}{b} \right)^4 \cos \frac{2m\pi x}{a} \right] \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) + \\ & \alpha \dot{X}(t) \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) + \rho h \ddot{X}(t) \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) - q_0 \cos \omega t \end{aligned} \quad (8)$$

通过 Bubnov-Galerkin 原理, 对式(8)进行积分, 得到系统的动力学方程为

$$\ddot{X}(t) + C\dot{X}(t) + k_1 X(t) + k_2 X^3(t) = k \cos \omega t \quad (9)$$

式中, $k_1 = \frac{h^2}{12\rho} \left[\left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 \right]^2 \left(\frac{E}{1-\mu^2} + e_{31} \frac{\delta e_{31} - m_{33}\lambda_{11}}{\delta \varepsilon_{33} - m_{33}^2} + \lambda_{11} \frac{\varepsilon_{33}\lambda_{11} - m_{33}e_{31}}{\delta \varepsilon_{33} - m_{33}^2} \right) = \omega_0^2$, 其中 ω_0 为系统的固有频率;
 $k_2 = \frac{E}{16\rho} \left[\left(\frac{m\pi}{a} \right)^4 + \left(\frac{n\pi}{b} \right)^4 \right]$; $k = \frac{16q_0}{\rho h \pi^2}$; $C = \frac{\alpha}{\rho h}$ 。

对动力学方程进行无量纲化, 令 $\tau = \omega_0 t$, $\omega_0 = \sqrt{k_1}$, $\bar{\omega} = \frac{\omega}{\omega_0}$, $f = \frac{X}{h}$, $\dot{f} = \frac{df}{d\tau}$, $\ddot{f} = \frac{d^2 f}{d\tau^2}$ 。得到无量纲方程为

$$\ddot{f}(\tau) + \alpha_1 \dot{f} + f + \alpha_2 f^3 = \alpha_3 \cos \tau \bar{\omega} \quad (10)$$

式中, $\alpha_1 = \frac{\alpha}{\rho h \omega_0}$ 为等效阻尼系数, $\alpha_2 = \frac{h^2 E}{16\rho \omega_0^2} \left[\left(\frac{m\pi}{a} \right)^4 + \left(\frac{n\pi}{b} \right)^4 \right]$, $\alpha_3 = \frac{16q_0}{\rho h^2 \pi^2 \omega_0^2}$ 为等效激励振幅。

引入无量纲小参数 ε , 得

$$\ddot{f}(\tau) + f = \varepsilon(-\alpha_1 \dot{f} - \alpha_2 f^3 + \alpha_3 \cos \tau \bar{\omega}) \quad (11)$$

用平均法求解无量纲方程, 设 $\zeta = 1 + \varepsilon\sigma$, $\bar{\omega}^2 = 1$, 其中 σ 为调谐参数, ε 是摄动参数, 代入式(11)可得

$$\ddot{f}(\tau) + \zeta^2 f = \varepsilon(-\alpha_1 \dot{f} - \alpha_2 f^3 + 2\zeta\sigma f + \alpha_3 \cos \zeta\tau) \quad (12)$$

以 a^*, θ 作为慢变振幅和慢变相位, 取变量变换为标准形式的方程组

$$\begin{cases} \dot{f} = a^* \cos(\zeta\tau + \theta) \\ \dot{\theta} = -a^* \zeta \sin(\zeta\tau + \theta) \end{cases} \quad (13)$$

将式(13)代入到式(12)化为标准形式的方程组

$$\begin{cases} \frac{da^*}{d\tau} = -\frac{\varepsilon}{\zeta} f(a^* \cos \psi, -a^* \zeta \sin \psi) \sin \psi = \varepsilon \phi \\ \frac{d\theta}{d\tau} = -\frac{\varepsilon}{\zeta a^*} f(a^* \cos \psi, -a^* \zeta \sin \psi) \cos \psi = \varepsilon \phi^* \end{cases} \quad (14)$$

式中, $\psi = \zeta\tau + \theta$ 。

引入第一次近似的 KB 变换

$$\begin{cases} a^* = y + \varepsilon U_1(\tau, y, \vartheta) \\ \theta = \vartheta + \varepsilon V_1(\tau, y, \vartheta) \end{cases} \quad (15)$$

并要求引入稳定振幅 y , 稳定相位 ϑ 的导数为

$$\begin{cases} \frac{dy}{d\tau} = \varepsilon Y_1(y, \vartheta) + \varepsilon^2 Y^*(y, \vartheta, \varepsilon) \\ \frac{d\vartheta}{d\tau} = \varepsilon Z_1(y, \vartheta) + \varepsilon^2 Z^*(y, \vartheta, \varepsilon) \end{cases} \quad (16)$$

式中, Y_1, Z_1 为不显含 τ 的振幅变化率和相位变化率; U_1 为 ϑ 的以 2π 为周期的周期函数, V_1 为 τ 的以 T 为周期的周期函数。

将式(15)代入式(14), 并考虑式(16), 令等式两端 ε 同次项的系数相等, 则有

$$\begin{cases} Y_1 + \frac{\partial U_1}{\partial \tau} = \frac{\alpha_2}{\zeta} y^3 \cos^3 \psi \sin \psi + \frac{\alpha_1}{\zeta} (-y \zeta \sin^2 \psi) - 2\sigma y \cos \psi \sin \psi - \frac{\alpha_3}{\zeta} \cos \zeta\tau \sin \psi = \\ \quad \frac{\alpha_2 y^3}{8\zeta} (2 \sin 2\psi + \sin 4\psi) - \frac{\alpha_1 y}{2} (1 - \cos 2\psi) - \sigma y \sin 2\psi - \frac{\alpha_3}{2\zeta} [\sin(\psi + \zeta\tau) + \sin \vartheta] \\ Z_1 + \frac{\partial V_1}{\partial \tau} = \frac{\alpha_2}{\zeta} y^2 \cos^4 \psi + \frac{\alpha_1}{\zeta} (-\zeta \sin \psi \cos \psi) - 2\sigma \cos^2 \psi - \frac{\alpha_3}{\zeta y} \cos \zeta\tau \cos \psi = \\ \quad \frac{\alpha_2 y^2}{8\zeta} (3 + 4 \cos 2\psi + \cos 4\psi) - \frac{\alpha_1}{2} \sin 2\psi - \sigma (1 + \cos 2\psi) - \frac{\alpha_3}{2\zeta y} [\cos(\psi + \zeta\tau) + \cos \vartheta] \end{cases} \quad (17)$$

可得

$$\begin{cases} Y_1 = -\frac{\alpha_1 y}{2} - \frac{\alpha_3}{2\zeta} \sin \vartheta \\ Z_1 = \frac{3\alpha_2 y^2}{8\zeta} - \sigma - \frac{\alpha_3}{2y\zeta} \cos \vartheta \end{cases} \quad (18)$$

对于稳态振动, $Y_1 = Z_1 = 0$, 可得

$$\begin{cases} \frac{\alpha_1 y}{2} = -\frac{\alpha_3}{2\zeta} \sin \vartheta \\ \frac{3\alpha_2 y^3}{8\zeta} - \sigma y = \frac{\alpha_3}{2\zeta} \cos \vartheta \end{cases} \quad (19)$$

将式(19)平方相加, 可得主共振时的幅频响应方程为

$$\varepsilon^2 \left(\frac{\alpha_1 y}{2} \right)^2 + \left(\varepsilon \frac{3\alpha_2 y^3}{8\zeta} - \varepsilon \sigma y \right)^2 = \frac{\varepsilon^2 \alpha_3^2}{4\zeta^2} \quad (20)$$

当 ε 相对较小时(如 $\varepsilon \leq 0.01$),由式(20)得到的一阶近似解和二阶近似解基本吻合^[30],因此下文主要讨论一阶近似解。

设

$$\begin{cases} y = y_0 + y_1 \\ \vartheta = \vartheta_0 + \vartheta_1 \end{cases} \quad (21)$$

其中, y_0 和 ϑ_0 是式(18)的解, y_1 和 ϑ_1 是小量。把式(20)代入式(18),且只保留 y_1 和 ϑ_1 的一次项,可得

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{d\tau} = -\frac{\alpha_1}{2}y_1 - \frac{\alpha_3}{2\zeta}\vartheta_1 \cos \vartheta_0 \\ \frac{d\vartheta_1}{d\tau} = \left(\frac{9\alpha_2 y_0}{8\zeta} - \frac{\sigma}{y_0}\right)y_1 - \frac{\alpha_3}{2\zeta y_0}\vartheta_1 \sin \vartheta_0 \end{cases} \quad (22)$$

解的稳定性是由式(22)右边的雅可比矩阵的特征值 λ 决定的。所以,式(22)的雅可比矩阵的特征方程为

$$\begin{vmatrix} -\frac{\alpha_1}{2} - \lambda & -\left(\frac{3\alpha_2 y_0^3}{8\zeta} - \sigma y_0\right) \\ \frac{9\alpha_2 y_0}{8\zeta} - \frac{\sigma}{y_0} & -\frac{\alpha_1}{2} - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

即

$$\lambda^2 + \alpha_1 \lambda + \left(\frac{3\alpha_2 y_0^3}{8\zeta} - \sigma y_0\right)\left(\frac{9\alpha_2 y_0}{8\zeta} - \frac{\sigma}{y_0}\right) + \frac{\alpha_1^2}{4} = 0 \quad (23)$$

根据 Routh-Hurwitz 稳定判据

$$\left(\frac{3\alpha_2 y_0^3}{8\zeta} - \sigma y_0\right)\left(\frac{9\alpha_2 y_0}{8\zeta} - \frac{\sigma}{y_0}\right) + \frac{\alpha_1^2}{4} < 0 \quad (24)$$

当上述不等式成立时,对应稳态解为不稳定解;否则为稳定解^[31]。

3 幅频响应分析

选取聚偏氟乙烯作为柔性压电材料,根据聚偏氟乙烯材料参数^[32],利用仿真软件对该系统进行数值计算。选取参数为 $\alpha_1 = 0.02$, $\varepsilon = 0.01$,并考虑3种不同的振动模态: $(m, n) = (1, 1)$, $(m, n) = (2, 1)$ 和 $(m, n) = (1, 2)$ 。由此得到柔性压电薄板在不同厚度、长宽比、外激励和温度条件下的幅频响应曲线,如图2~图5所示。图2~图5中,稳定解和不稳定解分别用实线和虚线表示。从图中可以发现,系统的响应曲线向右弯曲,呈现出硬非线性特性。在部分情况下,系统会出现2个鞍结分岔点,存在多解共存的现象。

图2中板厚度分别为10、11和12 mm,其余固定参数 $a=300$ mm, $b=250$ mm, $q_0=0.10$ MPa, $T_0=20$ °C。从图2a中基频模态 $(m, n) = (1, 1)$ 的响应曲线可以看出,随着板厚度由10 mm逐渐增加到12 mm,系统的共振幅值逐渐减小,同时共振区间也变窄。2个鞍结分岔点之间的虚线区域代表不稳定区间,存在多解共存的现象。根据式(11)和(12)的分析,厚度的增加会使系统的刚度提高,固有频率增大,从而抑制了大幅振动的产生,并减小了共振幅值与不稳定区间的范围。对于图2b和图2c中的高阶模态 $(m, n) = (2, 1)$ 和 $(m, n) = (1, 2)$,其响应特征与基频模态相比,共振幅值减小且不稳定区间消失。这是由于高阶模态的刚度和固有频率有所增大,导致共振幅值减小且不稳定区间也随之变窄甚至消失。

图3展示了3种不同尺寸的板,其宽度分别为300、250和200 mm,对应的长宽比分别为 $e=1.00$ 、 $e=1.25$ 和 $e=1.50$ 。其余参数为 $a=300$ mm, $q_0=0.10$ MPa, $T_0=20$ °C, $h=10$ mm。由图3可以看出,随着长宽比的逐渐增大,系统的共振幅值呈现出逐渐减小的趋势,同时共振区间和不稳定区间的宽度也相应地变窄。在高频模态中,随着长宽比逐渐增大,共振幅值减小,且不稳定区间的缩减相较基频模态更为显著。

这是因为长宽比的增大增强了系统的刚度,提升了其固有频率,从而在相同条件下使得振动幅值减小,不稳定区间也随之变窄。

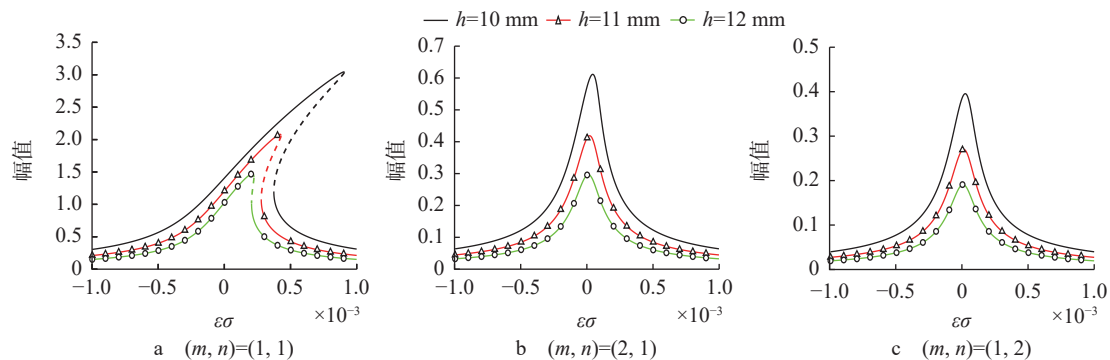


图2 厚度变化的幅频响应曲线

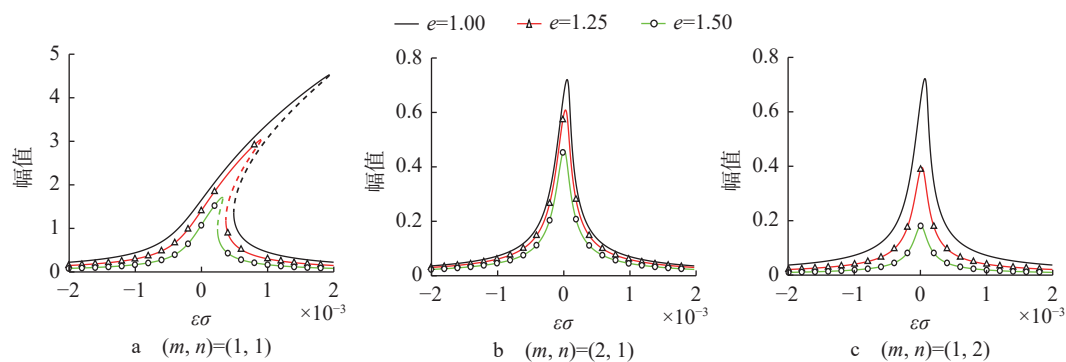


图3 长宽比变化的幅频响应曲线

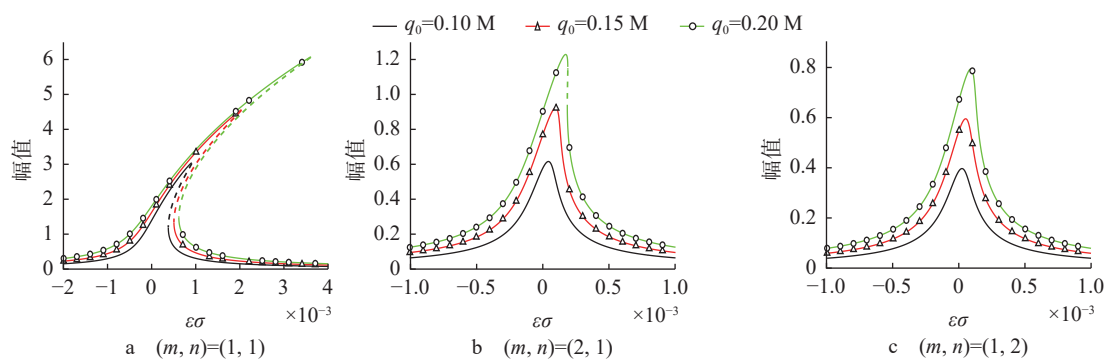


图4 外激励变化的幅频响应曲线

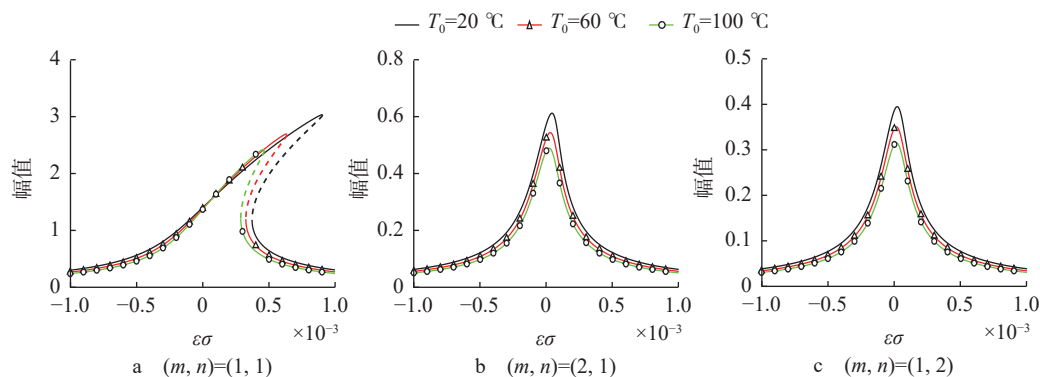


图5 温度变化的幅频响应曲线

图 4 中, 外激励分别设定为 0.10、0.15 和 0.20 MPa, 其余参数 $a=300$ mm, $b=250$ mm, $T_0=20$ °C, $h=10$ mm。从图 4 可以看出, 在 3 种模态下, 随着外激励的增加, 系统的共振幅值显著上升, 同时共振区间和不稳定区间也变宽。这是由于外激励幅值 q_0 与系统的等效激励幅值 α_3 呈正比关系, 激励的增强会导致薄板产生更大的位移变形, 进而使振动幅值上升。系统的硬非线性特性也因此变得更加明显, 解的不稳定性范围向更宽的频率范围扩展。

图 5 展示了温度分别为 20、60 和 100 °C 时的情况, 其他参数 $a=300$ mm, $b=250$ mm, $q_0=0.10$ MPa, $h=10$ mm。由图 5 可以看出, 当达到主共振区域后, 随着温度的升高, 共振幅值逐渐减小, 同时共振区间和不稳定区间也变窄。高阶模态与基频模态相比, 其共振幅值减小, 不稳定区间消失。这是因为温度 T_0 升高会使受约束的薄板产生面内压缩内力, 这进而增加了结构的几何刚度, 导致固有频率上升、振幅下降以及不稳定区间变窄。

调谐参数变化引起的力幅响应曲线如图 6 所示。其他参数为 $a=300$ mm, $b=250$ mm, $T_0=20$ °C, $h=10$ mm。选取基频模态 $(m, n)=(1, 1)$ 。从图中可以观察到, 当调谐参数 $\sigma > 0$, $q_0 \leq 1.15$ MPa 时, 系统呈现出 2 个鞍结分岔点, 对应于多解共存的现象。此时系统表现出不稳定的动力行为, 并伴随跳跃现象。当外激励幅值超过临界值 1.15 MPa 时, 多值响应区间消失, 系统恢复为单解状态。当调谐参数 $\sigma \leq 0$ 时, 系统仅有一个解, 且系统的响应幅值呈现递增趋势。随着调谐参数的减小, 响应幅值逐渐衰减, 这与图 4 所示的规律相吻合。

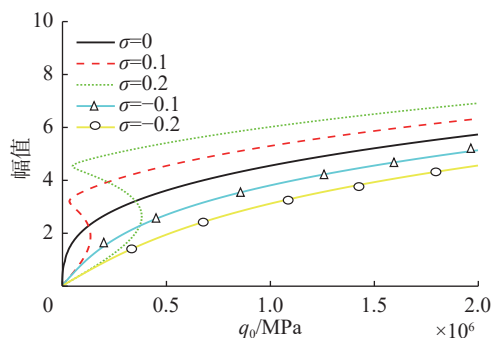


图 6 σ 对薄板力幅响应的影响

相平面轨迹通过仿真软件对式 (24) 进行数值计算得到, 如图 7 所示。其他固定参数为 $a=300$ mm, $b=250$ mm, $T_0=20$ °C, $h=10$ mm, $q_0=0.10$ MPa。当调谐参数发生变化时, 系统的稳态解个数也随之变化。当 $\varepsilon\sigma=0.6 \times 10^{-3}$ 时, 图 7a 中的 3 个节点分别对应图 7b 中的 3 个稳态解: 其中 A 点和 C 点附近的轨迹呈现螺旋收敛的趋势, 这表明这些状态是稳定的, 系统在受到小的扰动后能够回归原状态, 属于稳定节点; 而 B 点周围的轨迹则向四周发散, 这表明系统在此处的振动状态容易发生改变, 属于不稳定节点。

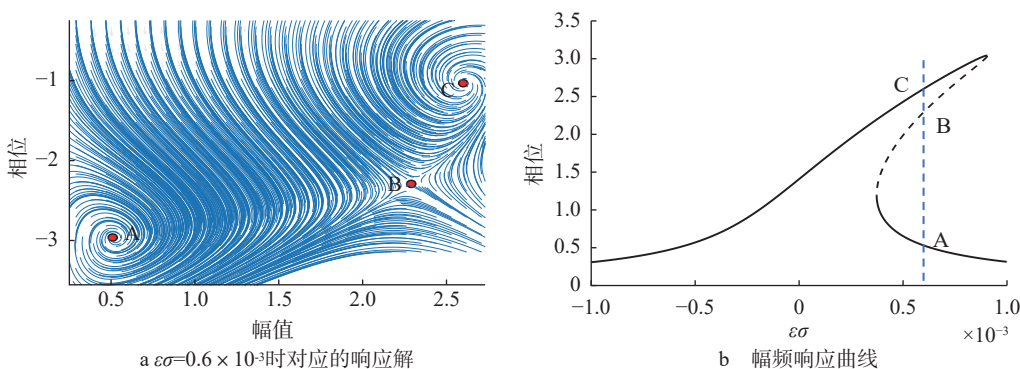


图 7 相平面轨迹

采用 Runge-Kutta 方法求解无量纲动力学方程 (12), 获得系统的数值解。计算基频模态下不同参数在主共振时, 理论解和数值解的稳态振幅并进行比较, 如表 1 所示。

从表中可以发现, 理论计算结果与数值仿真结果之间的吻合度极高, 其最大相对误差不超过 1%, 这验证了理论推导过程的准确性。此外, 随着厚度、长宽比或温度的增加, 相对误差逐渐减小; 随着外激励的增加, 相对误差逐渐增大。系统的稳定性越高, 理论解与数值解之间的一致性越好, 这与图 2 ~ 图 5 中所展示的参数变化趋势相吻合, 进一步证实了结论的可靠性。

表 1 主共振下理论解和数值解对比

参数		理论解	数值解	相对误差/%
h/mm	10	1.404	1.406	0.142
	11	1.202	1.203	0.082
	12	1.025	1.026	0.061
e	1.00	1.647	1.649	0.151
	1.25	1.404	1.406	0.112
	1.50	1.072	1.073	0.075
q_0/MPa	0.10	1.404	1.406	0.112
	0.15	1.635	1.637	0.151
	0.20	1.813	1.816	0.181
$T_0/^\circ\text{C}$	20	1.404	1.406	0.112
	60	1.388	1.39	0.098
	100	1.371	1.372	0.087

4 结 论

本文基于 von-Kármán 大挠度理论,探讨了在外激励与温度效应共同作用下的柔性压电薄板的非线性主共振特性。通过理论推导与数值仿真,系统深入分析了物理参数对幅频响应及稳定性的影响,主要结论如下:

(1)当 $T_0=20^\circ\text{C}$,调谐参数 $\sigma > 0$ 且 $q_0 \leq 1.15\text{ MPa}$ 时,系统可能存在3个理论解。当 $q_0 > 1.15\text{ MPa}$ 时,多值响应区间消失,系统转变为单解状态。当 $\sigma \leq 0$ 时,主共振幅值随着 σ 的减小而减小,跳跃和多值现象消失。

(2)当系统模态由(1,1)变为(2,1)和(1,2)时,共振幅值减小,不稳定区域缩小。随着板厚度、长宽比和温度的增加,系统的共振幅值减小,共振区间变窄;然而,随着外激励的增大,系统的共振幅值增加,共振区间变宽。

(3)当系统出现三解共存的现象时,易诱发跳跃共振等不稳定动力学行为。系统存在3个稳态解,其中2个为稳定解,周围轨迹收敛;另一个为不稳定解,周围轨迹发散。响应幅值与系统初始条件密切相关,因此在实际应用中,可通过优化初始条件来提高结构工作的安全性与稳定性。

参考文献:

- [1] Xu Q Q, Gao X Y, Zhao S F, et al. Construction of bio-piezoelectric platforms: from structures and synthesis to applications[J]. *Advanced Materials*, 2021, 33(27): 2008452.
- [2] 戚夫正,王春明. 压电效应演示实验的新设计 [J]. *大学物理*, 2022, 41(8): 47–51, 75.
Xian F Z, Wang C M. A demonstration experiment of piezoelectric effects[J]. *College Physics*, 2022, 41(8): 47–51, 75.
- [3] Dagdeviren C, Joe P, Tuzman O L, et al. Recent progress in flexible and stretchable piezoelectric devices for mechanical energy harvesting, sensing and actuation[J]. *Extreme Mechanics Letters*, 2016, 9: 269–281.
- [4] 鲁忠孝,高国伟. PVDF 压电复合材料及其应用的研究进展 [J]. *微纳电子技术*, 2023, 60(9): 1356–1365.
Lu Z X, Gao G W. Research progress in PVDF piezoelectric composites and their applications[J]. *Micronanoelectronic Technology*, 2023, 60(9): 1356–1365.
- [5] 刘玉荣,向银雪. 基于 PVDF 的压电触觉传感器的研究进展 [J]. *华南理工大学学报(自然科学版)*, 2019, 47(10): 1–12.
Liu Y R, Xiang Y X. Research progress of PVDF-based piezoelectric tactile sensor[J]. *Journal of South China University of Technology (Natural Science Edition)*, 2019, 47(10): 1–12.
- [6] 郭弦,黎小毛,彭映成,等. 基于 PVDF 的混凝土内应力传感器设计及应用 [J]. *仪表技术与传感器*, 2015(1): 20–21, 37.
Guo X, Li X M, Peng Y C, et al. Design and application of internal-stress sensor of concrete[J]. *Instrument Technique and*

- Sensor, 2015(1): 20–21, 37.
- [7] Zhang Q Y, Li J H, Li G Y, et al. Hierarchically structured hollow PVDF nanofibers for flexible piezoelectric sensor[J]. *Chemical Engineering Journal*, 2024, 498: 155661.
- [8] 王旭. 热关断功能锂离子电池隔膜的制备及性能研究 [D]. 哈尔滨: 哈尔滨理工大学, 2022. doi:10.27063/d.cnki.ghlgu.2022.001092.
- Wang X. Preparation and performance of lithium-ion battery separator with thermal shutdown function[D]. Harbin: Harbin University of Science and Technology, 2022. doi:10.27063/d.cnki.ghlgu.2022.001092.
- [9] 孙飞, 陈友文, 顾云, 等. PVDF 薄膜传感器用于测试块状岩石表面爆炸应力的研究 [J]. *爆破器材*, 2023, 52(3): 58–64.
- Sun F, Chen Y W, Gu Y, et al. Application of PVDF thin film sensor in explosive stress measurement on the surface of massive rock[J]. *Explosive Materials*, 2023, 52(3): 58–64.
- [10] Uitslag-doolaard H J, Zwijsen K, Roelofs F, et al. myMUSCLE, a new multiphysics, multiscale simulation coupling environment[J]. *Nuclear Science and Engineering*, 2023, 197(10): 2543–2560.
- [11] Li H, Wei P, Han X F, et al. Internal pressure-temperature coupling analysis method for thermal decomposition of GFRP composites based on the overlapping elements method[J]. *Materials*, 2024, 17(3): 756.
- [12] Challa V S A, Zhou W H, Misra R D K, et al. The effect of coiling temperature on the microstructure and mechanical properties of a niobium–titanium microalloyed steel processed via thin slab casting[J]. *Materials Science and Engineering: A*, 2014, 595: 143–153.
- [13] 侯艳青, 刘小川, 李建军, 等. 压电材料在低温下的性能研究 [J]. *压电与声光*, 2024, 46(6): 910–915.
- Hou Y Q, Liu X C, Li J J, et al. Study on the properties of piezoelectric materials at low temperature[J]. *Piezoelectrics & Acousto-optics*, 2024, 46(6): 910–915.
- [14] 王勋. 压电矩形薄板热弹耦合的非线性振动分析 [D]. 太原: 中北大学, 2020. doi:10.27470/d.cnki.ghbgc.2020.000513.
- WANG X. Nonlinear vibration analysis for coupled thermo-piezoelectric-mechanical of piezoelectric rectangular thin plates[D]. Taiyuan: North University of China, 2020. doi:10.27470/d.cnki.ghbgc.2020.000513.
- [15] Guo X K, Zhang Y, Zhang Y Y, et al. Geometrically linear and nonlinear frequency analyses of piezoelectric three-phase nanocomposite sandwich beams in thermal environment[J]. *Thin-Walled Structures*, 2025, 216: 113714.
- [16] 程立平. 压电复合材料梁和板的变形 [D]. 南京: 南京航空航天大学, 2010.
- Cheng L P. Deflection of laminated beams and plates with piezoelectric patches[D]. Nanjing: Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, 2010.
- [17] Chai Q D, Wang Y Q. Nonlinear vibration of spinning joined conical-cylindrical shells with bolt boundary constraints in thermal environment[J]. *Nonlinear Dynamics*, 2024, 112(15): 12875–12906.
- [18] 孟莹, 薛春霞, 王勋. 压电材料圆形板热弹耦合作用下的主共振 [J]. *中北大学学报(自然科学版)*, 2019, 40(6): 495–502.
- Meng Y, Xue C X, Wang X. Principal resonance of piezoelectric material circular plates under thermoelastic coupling[J]. *Journal of North University of China (Natural Science Edition)*, 2019, 40(6): 495–502.
- [19] Zhang S B, Chen Z, Zhang X M. Robust active vibration control of flexible smart beam by μ -synthesis[J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2025, 596: 118737.
- [20] Shen Z H, Tang T X, Wang J, et al. Computation-guided design of flexible piezoelectric composites by optimizing charge-stress transmission[J]. *Nano Energy*, 2023, 117: 108933.
- [21] Lyu S H, Li B Y, Zhang Q, et al. A finite deformation phase field model for electromechanical fracture of flexible piezoelectric materials[J]. *Applied Mathematical Modelling*, 2024, 130: 728–748.
- [22] Xia Y, Zhou X Y, Niu H Z, et al. Electric–Mechanical coupling analysis of two-dimensional piezoelectric heterogeneous materials in flexible electric devices with extended multiscale isogeometric analysis[J]. *European Journal of Mechanics-A/Solids*, 2025, 109: 105430.
- [23] Pervaiz S, Kanwal N, Shahzad A, et al. Thermal and dielectric behaviour of polymer-based nanocomposites flexible sheets as

- highly stable dielectric materials[J]. *International Journal of Polymer Science*, 2023, 2023(1): 3892823.
- [24] Zhang S Q, Lai W J, Huang C Y, et al. Dynamic modeling and control of rigid-flexible-thermo-electrically coupled piezoelectric integrated smart spacecraft[J]. *Applied Mathematical Modelling*, 2025, 140: 115896.
- [25] 应成狄. 柔性印刷电子运动薄膜的动态特性及控制研究 [D]. 西安: 西安理工大学, 2022. doi:10.27398/d.cnki.gxalu.2022.000112.
- Ying S D. Dynamics characteristics and control of flexible printing electronic traveling membrane[D]. Xi'an: Xi'an University of Technology, 2022. doi:10.27398/d.cnki.gxalu.2022.000112.
- [26] Wang X, Xue C X, Li H T. Nonlinear primary resonance analysis for a coupled thermo-piezoelectric-mechanical model of piezoelectric rectangular thin plates[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2019, 40(8): 1155–1168.
- [27] 罗娜. 航天器刚弹耦合动力学与振动抑制研究 [D]. 哈尔滨: 哈尔滨工程大学, 2023, doi:10.27060/d.cnki.ghbcu.2023.000335.
- Luo N. Research on rigid-elastic coupling dynamics and vibration suppression of spacecraft[D]. Harbin: Harbin Engineering University, 2023.
- [28] 陈予恕. 非线性振动 [M]. 天津: 天津科学技术出版社, 1983.
- [29] Liu M F, Chang T P. Closed form expression for the vibration problem of a transversely isotropic magneto-electro-elastic plate[J]. *Journal of Applied Mechanics*, 2010, 77(2): 024502.
- [30] Xue C X, Pan E, Han Q K, et al. Non-linear principal resonance of an orthotropic and magnetoelastic rectangular plate[J]. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 2011, 46(5): 703–710.
- [31] Kovacic I, Brennan M J. The Duffing Equation: Nonlinear Oscillators and their Behaviour[M]. Hoboken: John Wiley & Sons, 2011.
- [32] 林伟康. 基于压电薄膜的多功能柔性触觉传感器阵列的制备及研究 [D]. 哈尔滨: 哈尔滨工业大学, 2020. doi:10.27061/d.cnki.ghgdu.2021.000856.
- Lin W K. Fabrication and research of multifunctional flexible sensor array based on piezoelectric film[D]. Harbin: Harbin Institute of Technology, 2020. doi:10.27061/d.cnki.ghgdu.2021.000856.

作者贡献声明

本声明旨在清晰地界定每位作者在本文研究及成稿过程中的具体贡献,以遵循学术规范并保障署名的公正性。各作者贡献如下:许易坤负责论文公式推导、数据收集与分析,以及论文撰写。薛春霞提供经费支持,参与概念构思、论文指导与修改等。

利益冲突声明

作者声明,不存在已知的可能影响本论文所报告工作的竞争性经济利益或个人关系。

AI 使用声明

本文的英文题名、摘要和关键词采用知网翻译生成,并进行部分修改。

伦理声明

本文不涉及人类或动物的生物学研究。

电子补充材料

补充材料可在本文的在线版本中获取 <https://doi.org/10.65658/j.hndk.2025081601>。

数据可用性

支持论文结论所需的所有数据均已包含在稿件和/或电子补充材料中。如需获取与本文相关的其他数据,可向通信

作者提出申请。

致谢/Acknowledgments

本文得到海南省自然科学基金资助项目(122MS003),海南大学科研基金项目(1KYQD(ZR)23064)和海南省教育教学改革研究项目(hnjg2023-23)的支持。

This work was supported by the Natural Science Foundation of Hainan Province (122MS003), the Scientific Research Foundation of Hainan University (1KYQD(ZR)23064), and the Education and Teaching Reform Research Project of Hainan Province (hnjg2023-23).

作者简介

许易坤(2001—),男,河南信阳人,海南大学材料与化工专业2022级硕士研究生。E-mail: xuyikun7292@163.com。

薛春霞(1973—),女,山西运城人,教授,博士生导师,研究方向:功能材料及结构非线性动力学。E-mail: xuechunxia@hainanu.edu.cn。

(责任编辑:张秀梅,英文校对:张海滨)



This is an open access article under the terms of the Creative Commons Attribution 4.0 International License (CC BY 4.0, <https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>).

© The Author(s) 2026. Published by Journal Editorial Department of Hainan University.

许易坤等. 柔性压电薄板在温度效应下的非线性主共振

Natural Science of Hainan University (ISSN 1004-1729)

<https://hndk.hainanu.edu.cn>