文章编号: 1004 - 1729(2020)01 - 0090 - 05

基于超静定基本体系的力法分析

屈　兵
(莆田学院 土木工程学院,福建 莆田 351100)

摘　要: 以超静定基本体系作为研究对象,系统分析了超静定基本体系选取的原则要点与思维方法,探讨了方法的适用性,通过若干实例阐明了方法的准确性、简便性与灵活性. 本方法绕开了力法求解的套路性思维,为复杂力学问题的求解与研究拓展了新的思路.

关键词: 超静定结构; 力法; 基本结构; 基本体系; 结构力学
中图分类号: O342　　文献标志码: A　　DOI: 10.15886/j.cnki.hdxbzkb.2020.0013

力法是求解超静定结构最基本的方法之一,基本结构的选取是力法求解的关键所在,巧妙选择基本体系可使计算大大简化[1]. 文献[2]针对超静定变截面梁,提出了一种在变截面处铰化的基本体系,减少了图乘次数,降低了计算量. 文献[3-4]对同一问题选取了两个不同的基本结构进行求解,增加了求解的灵活性. 目前大部分关于结构力学的论著在定义力法基本结构时会强调其为静定结构[6-9];已有文献中对力法的研究也多限于静定基本结构[2-5]. 但实际上,基本结构采用静定或超静定结构均可,教材的初衷在于以一种较为简便与易于理解的方式传递给读者. 文献[10-11]在探讨力法基本结构的选取技巧时提到了超静定基本结构的选取,并以简单实例说明,但未进行选取规则的深入研究与分析. 除此以外,未见其他有关超静定基本体系的研究文献. 基于此,本文以超静定基本体系作为切入点,系统分析了力法求解中超静定基本体系选取的原则要点与思维方法,探讨了方法的适用性,并以几个代表性实例来说明该方法在力法求解中的妙用. 该方法有助于打破力法求解时惯有的思维定势,使学习者能更深入地认识力法,从而为力法求解提供了新的思路[12-13].

1　问题的提出

问题 1　用力法求解图 1 所示的超静定组合结构. 已知 AB 杆的抗弯刚度为 EI,EF 杆的轴向抗拉压刚度 $EA_1=\infty$,其他各杆刚度均为 EA,$EI/EA=0.12a^2$.

通过几何组成分析可知,该结构为 4 次超静定轴对称组合结构,其中 AB 杆为梁式杆,其余各杆均为桁架杆,对称轴为 EF 杆所在直线. 直接求解该结构非常复杂,按照常规思路,可通过取半结构来降低对称结构的超静定次数,进而求解,半结构如图 2 所示.

在半结构的选取与计算中发现存在如下困难:①半结构的边界条件易混淆,半结构在选取时容易出错;②半结构为 3 次超静定组合结构,几何组成复杂,在计算系数项时需同时考虑轴向刚度与弯曲刚度的影响,计算工作量大且繁杂. 因此,采用半结构方法的求解难度仍然不小,故考虑其他更为便捷的方法.

收稿日期: 2019 - 08 - 25
基金项目: 莆田市科技局科研创新重大平台项目(2018ZP06);莆田学院引进人才科研启动费项目(2018074)
作者简介: 屈兵(1988 -),男,湖南邵阳人,讲师,博士,研究方向:桥梁结构理论与监测评估,E-mail:bingoqu@foxmail.com

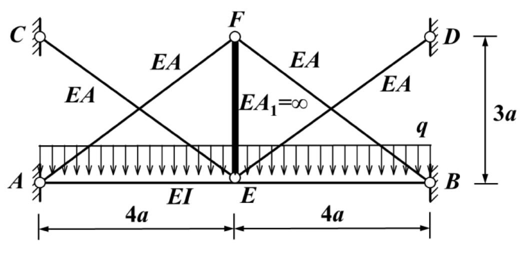


图 1　问题 1 超静定组合结构

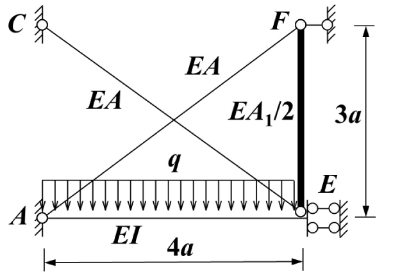


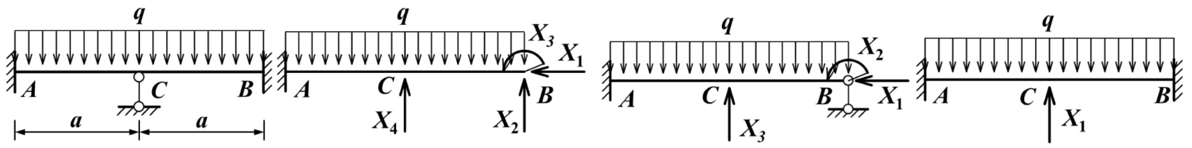
图 2　问题 1 半结构

2　力法的基本体系

采用力法求解时常规做法是去掉原结构所有的多余约束,并代以相应的多余未知力作用,此时得到的基本结构为静定结构,后续只需利用静定结构内力与位移的计算知识即可求解.

但从严谨的角度讲,基本结构并不一定非要采用静定结构,力法的本质是利用变形协调关系来求解多余约束力,简化原结构,然后进一步求解,因此只要选取的基本体系与原结构体系在受力上是等效的,且基本结构为几何不变体系,那么该基本结构就是合理有效的[14-15].

图 3(a)所示为 4 次超静定结构,图 3(b)、3(c)、3(d)均为其有效的基本体系,其中 3(c)和 3(d)为超静定基本体系.



(a)原结构 (b)静定基本体系(c)超静定基本体系 1(d)超静定基本体系 2

图 3　超静定结构及其基本体系

不论基本体系为静定结构,还是超静定结构,若设多余未知力个数为 n,则力法基本方程均可表示为式(1):

$$\begin{bmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & \cdots & \delta_{1n} \\ \delta_{21} & \delta_{22} & \cdots & \delta_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \delta_{n1} & \delta_{n2} & \cdots & \delta_{nn} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \Delta_{1p} \\ \Delta_{2p} \\ \vdots \\ \Delta_{np} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{Bmatrix}, \tag{1}$$

其中,X_1、X_2、$\cdots$、X_n 为多余未知力,δ_{ij} 与 Δ_{np} 为各系数项与自由项. 后续求解思路与力法的常规做法无异,为计算各系数项与自由项,并求解多余未知力,其具体过程在此就不再赘述.

3　超静定基本体系的选取原则

灵活选择超静定结构作为基本结构有时能使问题得到大大简化,但并非所有力法求解都适合选用超静定结构作为基本结构,在实际分析中,可以参考如下原则:

(1)观察原结构的超静定次数　一般来讲,超静定的基本结构适用于原结构超静定次数较大的时情况,因为基本结构的超静定次数与多余未知力的总和是一定的,其值等于原结构的超静定次数. 所以,基本结构的超静定次数越多,就意味着多余未知力的个数越少,多余未知力求解起来就越容易. 如图 3 所示的 4 次超静定结构,若选择图 3(d)所示的 3 次超静定结构作为基本结构,则多余未知力只有一个,比如图 3(a)中的 4 个多余未知力求解起来会容易很多. 需要说明的是,这里易于求解的前提还要包括所选择的超静定基本结构本身要便于求解(参考原则(2)、(3)).

(2)观察原结构中是否包含内力与位移易于计算的超静定结构. 常见的易于计算的超静定结构类型包括但不限于以下几种情况:

a、不同约束条件下的单跨超静定等截面直杆,如图 3(c)、3(d)所示的结构.

b、在不考虑轴向变形的前提下，集中力作用在无线位移的结点上时，汇交于该结点的各杆无弯矩，也无剪力，只有轴力．如图 4 所示两结构，若不考虑轴向变形，结构中各杆均只受到轴力，无弯矩、剪力．

c、易于计算的超静定对称结构．某些对称结构利用其半结构或 1/4 结构，以及荷载的对称性，可大大简化计算过程．

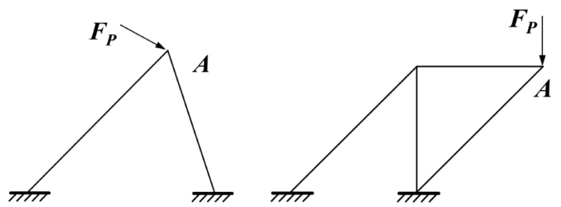


图 4　集中力作用在无线位移结点上情况

d、其他易于计算的情形．

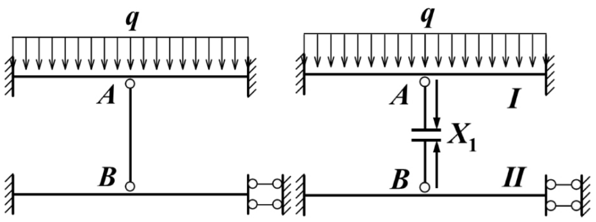
(3) 原结构可以通过某种方式拆分成原则(2)中的某一类或几类易于计算的超静定结构．

a、截断二力杆连接(一个多余约束)或铰连接(两个多余约束)，并附加对应的多余未知力．

b、若支座处连接有多根杆件，可将结构从支座处进行拆分，无需附加多余未知力．

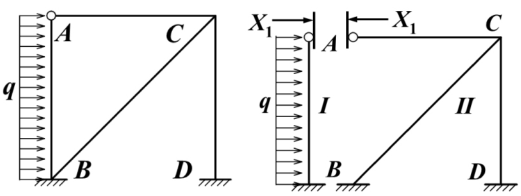
下面通过两个实例深化对上述原则的理解与应用．

实例 1　求解图 5(a)所示结构．该结构超静定次数为 6 次，易见，结构上下两部分均为易于计算的单跨超静定等截面直杆，通过二力杆 AB 相连．因此考虑将 AB 杆截断，这样可得到图 5(b)所示的只包含一对多余未知力 X_1 的超静定基本体系(其中，Ⅰ为 3 次超静定结构，Ⅱ为 2 次超静定结构)，这样，后续求解过程得到大大简化．



(a) 原结构　(b) 超静定基本体系

图 5 实例 1 原结构及基本体系



(a) 原结构　(b) 超静定基本体系

图 6　实例 2 原结构及基本体系

实例 2　求解图 6(a)所示结构(不考虑各杆轴向变形)．经分析可知：①结构超静定次数为 5 次；② A、C 均为无线位移结点，因此 AC、BC、CD 杆只受轴力；③B 支座连接的 BA、BC 两根杆可进行拆分．因此，将原结构从 A、B 处断开，可得到图 6(b)所示超静定基本体系，原结构被分解成左(Ⅰ)右(Ⅱ)两部分：其中Ⅰ为静定结构；Ⅱ为 3 次超静定结构，但其各杆只受轴力，无弯矩、剪力．Ⅰ、Ⅱ均为易于计算的结构．且由于 AC 杆只受轴力，断开 A 铰后，只需附加一对沿 AC 杆轴向的水平未知力 X_1．因此，取图(b)的超静定基本体系，这使原结构的计算得到了极大简化．

4　问题的解答

回到第 1 小节的问题，利用上述思维方法，通过选取合理的超静定基本体系，问题即可迎刃而解．将原结构从 A、B、E 处拆分为两部分．这里，利用结构的对称性，截断 E 铰只需附加一对竖直方向的多余未知力 X_1 即可．最后得到只包含一对多余未知力的超静定基本体系，如图 7(a)所示．

1) 力法方程为：

$$\delta_{11}X_1 + \Delta_{1p} = 0 .$$

2) 基本结构在 $X_{1p} = 1$ 作用下的内力图 $\overline{F}_{N1}$、$\overline{M}_1$ 图以及外荷载作用下的内力图 F_{Np}、M_p 图分别见图 7(b)、7(c)．(注：在计算 $X_{1p} = 1$ 作用下桁架部分基本结构内力时，将单位荷载 $X_{1p} = 1$ 分解成对 1/2 大小的对称荷载与反对称荷载之和，采用结点法，并利用 EF 杆刚度无穷大的条件，可快速求出各桁架杆的内力．)

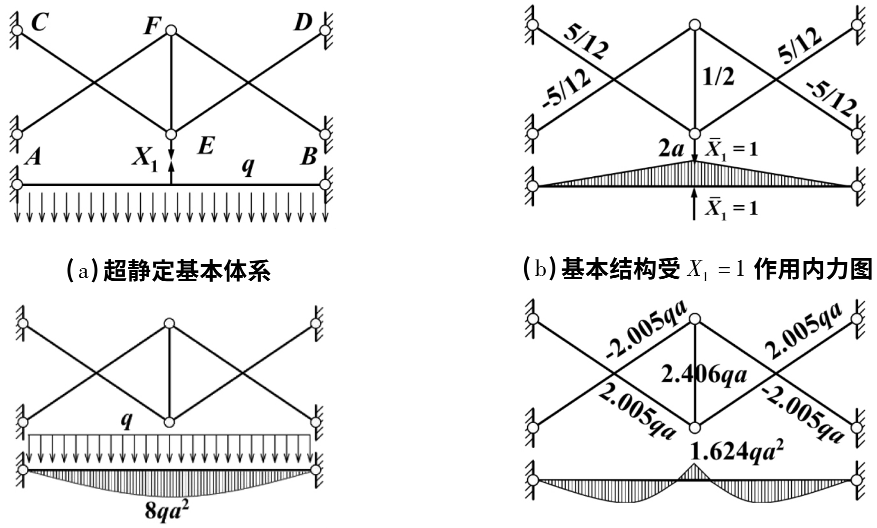
3) 计算系数及自由项：

$$\delta_{11} = \frac{1}{EA} \times 4 \times \left(\pm \frac{5}{12} \right)^2 \times 5a + \frac{1}{EI} \times 2 \times \frac{1}{2} \times 4a \times 2a \times \frac{2}{3} \times 2a = \frac{3325a}{36EA},$$

$$\Delta_{1p} = \frac{1}{EI} \times 2 \times \frac{1}{2} \times 4a \times 8qa^2 \times \left(-\frac{5}{8} \times 2a\right) = -\frac{16000qa^2}{36EA}.$$

4）将以上计算结果带入式(2)，求得多余未知力 $X_1 = 4.812qa$.

5）根据 $F_N = X_1 \cdot \overline{F}_{N1} + F_{Np}$ 及 $M = X_1 \cdot \overline{M}_1 + M_p$，得到结构最终的内力图如图7(d)所示.



(a)超静定基本体系　　(b)基本结构受 $X_1=1$ 作用内力图

(c)基本结构受外荷载作用内力图　　(d)结构最终内力图

图7　超静定基本体系

该计算结果与传统取静定基本结构方法求解出来的结果完全相同，读者可自己验证.

5　结　论

对力法分析中超静定基本结构的选取进行了研究与探讨，得到如下结论:(1)超静定基本体系更适用于原结构超静定次数较高的情况，选用超静定基本体系可有效减少多余未知力个数;(2)超静定基本体系选取的灵活性大、技巧性强，应认真分析原结构的几何组成，找出易于计算的超静定基本体系，这样才能真正达到简化计算的目的;(3)并非所有原结构都能找出易于计算的超静定基本体系，在实际应用中，应具体问题具体分析，找到最合适的求解方法.

在进行传统力学的学习与研究时，应重视绕开传统思维方法的束缚，注重从不同角度观察问题、拓展思路，这样不仅有助于提高创新能力与专业水平，而且也为更深层次的信息挖掘提供了基础与思路.

参考文献:

[1] Kaveh A, Shojaei I, Rahami H. New developments in the optimal analysis of regular and near-regular structures: decomposition, graph products, force method [J]. Acta Mechanica, 2015, 226(3): 665－681.

[2] 黄亮，马捷，邓煜涵，等. 一种超静定变截面梁的力法计算技巧 [J]. 力学与实践，2016，38(4):459－461.

[3] 邹珊. 基于两种基本结构的力法方程及叠加公式 [J]. 天津农学院学报，2012，19(2):37－39.

[4] 杨立军，邓志恒，陆守明，等. 基于不同基本结构求解超静定问题的力法方程 [J]. 河南理工大学学报(自然科学版)，2012，31(5): 594－597.

[5] 秦静，赵恒博. 力学中求解约束力的方法解析 [J]. 焦作大学学报，2018，32(1): 104－106.

[6] 祁皑，林伟. 结构力学 [M]. 第2版. 北京: 中国建筑工业出版社，2018.

[7] 龙驭球，包世华，袁驷. 结构力学Ⅰ—基本教程 [M]. 第4版. 北京:高等教育出版社，2018.

[8] Leet K, Uang C M, Gilbert A M. Fundamentals of structural analysis [M]. 5th Edition. Chichester: McGraw-Hill Education, 2017.

[9] Hibbeler R C, Kiang, T. Structural analysis [M]. 8th Edition. Upper Saddle River: Pearson Prentice Hall, 2015: 395－400.

[10] 郭江涛. 合理选取基本结构在力法求解中的重要性 [J]. 黑龙江科技信息，2014(23): 29－30.

[11] Song X Z, Lu M L, Jin R C. Practical Calculation Method of Force Method—Layered Force Method [C] //Applied Mechanics

and Materials. Trans Tech Publications, 2012, 166: 3317 - 3322.

[12] 严心池，盖京波. 结构力学教学核心概念的精细研究——以力法为例[J]. 力学与实践，2016，38(4)：453 - 455.

[13] 胡国辉，楚海建，卢志明，等. 从大学的理念谈力学本科人才培养[J]. 力学与实践，2019，41(3)：323 - 329.

[14] 单建. 趣味结构力学[M]. 北京：高等教育出版社，2015：86 - 88.

[15] Song X Z. Founded and Explore of the Multiple Primary Structure of Force Method[C]//Applied Mechanics and Materials. Trans Tech Publications, 2013, 275: 788 - 791.

Force Method Analysis Based on Statically Indeterminate Primary System

Qu Bing

(School of Civil Engineering, Putian University, Putian 351100, China)

Abstract: In the report, the statically indeterminate primary system was taken as object to analyze the selection principles and thinking methods of the statically indeterminate primary system, the applicability of this method was discussed. Several instances were presented to illustrate the accuracy, simplicity and flexibility of this method. Traditional solving routines of the force method were bypassed, which expands a new idea for analyzing and solving complicated mechanical problems.

Keywords: statically indeterminate structure; force method; primary structure; primary system; structural mechanics