第 26 卷 第 4 期
2008 年 12 月
海南大学学报自然科学版
NATURAL SCIENCE JOURNAL OF HAINAN UNIVERSITY
Vol. 26 No. 4
Dec. 2008

文章编号:1004 - 1729(2008)04 - 0303 - 06

数学娱乐(三)——洛书定理与应用

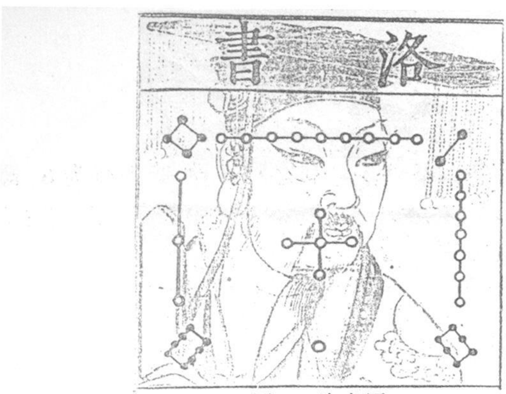
耿　济
(海南大学 信息科学技术学院, 海南 海口 570228)

摘　要:通过考古发现洛书的年代,同时获得洛书定理与应用.

关键词:洛书;对应短阵;洛书定理
中图分类号:O 157　　　　**文献标识码**:A

本文是数学娱乐[1-2]的续作,主要探讨洛书定理与应用,此外,通过考古发现洛书的年代.

举世公认最早的幻方是洛书,这是中国古代数学一大贡献,现从《易经》中选出一幅精美的插图(图 1).



$$\begin{pmatrix} 4 & 9 & 2 \\ 3 & 5 & 7 \\ 8 & 1 & 6 \end{pmatrix}$$

图 1　洛书图

图 1 的 3 点说明:第 1 点,用圆圈个数表示数字,把 1 ~ 9 排成 3 阶矩阵,具有每行、每列以及左右对角线上 3 个数相加等于 15 的性质. 第 2 点,圆圈分黑与白两色,白色是奇数 1,3,5,7,9,代表天,天为阳;黑色是偶数 2,4,6,8,代表地,地为阴,这与古代阴阳学说有关. 第 3 点,背景人物是夏禹王. 汉代孙安国说:"洛书者,禹治水时,神龟负文而列背,有数至九,禹遂因而第之以成《九类》."[3] 神龟出自洛水,负出的书称为洛书,这是一个美丽的传说,由来已久.

洛书长期受到人们的重视. 朱熹认为洛书"分合进退,纵横逆顺,无往而不相值焉". 王梓坤指出:"人们也许认为(洛书)这只是一种巧妙的数学游戏,不料电子计算机的出现后,它却获得新的应用. 目前它在程序设计、组合分析、实验设计、人工智能、图论、博奕论等方面都受到重视."[4]

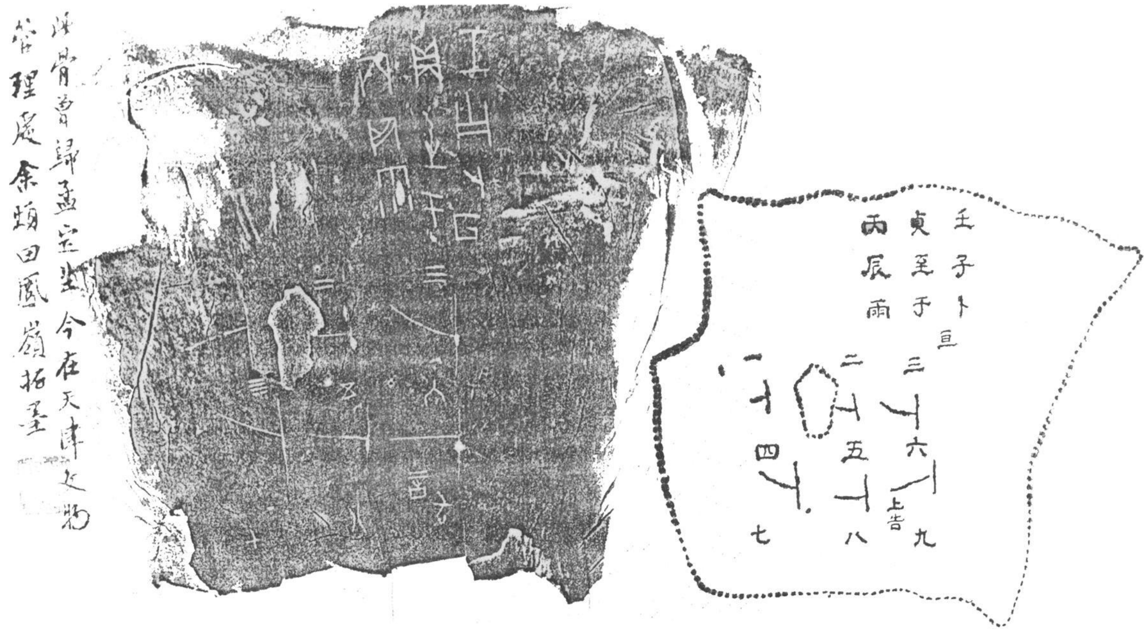
1　洛书发现的年代

通过考古出土文物来探讨洛书的年代. 1977 年春天,阜阳双古堆西汉汝阴侯墓中出土的"太乙九宫占盘",这是西汉初年已有洛书的证明. 古书《大戴礼记 · 明堂篇》中有"二九四,七五三,六一八"的记载,考古学家夏鼐认为该书是"战国末至西汉初年作品".[5] 考古与文献都说明洛书最迟出现在西汉初年.

殷墟出土的甲骨中有一片珍贵的文物,笔者称为"原始洛书"(如图 2).

拓片中数字 1,2,…,9 组成 3 阶矩阵,第 2 行、第 2 列以及左右对角线上 3 个数之和等于 15,称为"米字形"性质,即具有洛书的部分性质,所以称为"原始洛书".

收稿日期:2008 - 06 - 10
作者简介:耿济(1929 -),男,江苏镇江人,海南大学信息科学技术学院教授.



（拓片来源：1976年承蒙天津文史馆陈邦怀副馆长寄赠）

图2　原始洛书图

从“原始洛书”过渡到洛书的步骤. “原始洛书”中四周各行各列3个数之和各异，第1行为6(最小)，第3行为24(最大)，第1列为12，第3列为18，平均值为15. 于是把最小的第1行中数字1，3与最大的第3行中数字9，7互相对调，保持“米字形”性质不变，得到新矩阵

$$\begin{pmatrix} 9 & 2 & 7 \\ 4 & 5 & 6 \\ 3 & 8 & 1 \end{pmatrix},$$

最后，又把新矩阵经过“化方为圆”，以5为圆心，四周各数字在圆周上，按顺时针旋转$\frac{\pi}{4}$，再经过“化圆为方”，得到洛书.

以上思路与宋代杨辉《续古摘奇算法》(1275年)中关于洛书作法“九子斜排，上下对易，左右相更，四维挺出”，有异曲同工之妙.

由此可知，从“原始洛书”到洛书，需要经历漫长的一段时间，周代有可能实现，期待着考古上的新发现得到证明.

2　洛书定理

洛书中隐藏着许多奥秘，谈谈近年来已知的成果.

上海科普作家谈祥柏指出[6]：把洛书每列数字从上到下看成一个3位数，3个3位数之和等于它们3个逆转从下到上的3位数之和，即

$$276+951+438=672+159+834=1\ 655,$$

还有它们的平方和也相等，即

$$276^2+951^2+438^2=672^2+159^2+834^2=1\ 172\ 421.$$

类似地，对于每行、两条对角线，也有

$$492+357+816=294+753+218=1\ 665,$$

$$492^2+357^2+816^2=294^2+753^2+218^2=1\ 035\ 369;$$

$$654+798+213=456+897+312=1\ 665,$$

$$654^2+798^2+213^2=456^2+897^2+312^2=1\ 109\ 889;$$

$$258+714+693=852+417+396=1\ 665,$$

$$258^2+714^2+693^2=852^2+417^2+396^2=1\ 056\ 609.$$

香港“数学票友”黄志华指出[7]:在洛书

$$\begin{pmatrix} 4 & ⑨ & 2 \\ ③ & 5 & ⑦ \\ 8 & ① & 6 \end{pmatrix}$$

中 9,7,1,3 顺时针构成 2 位数 97,71,13,39 以及逆时针构成 2 位数 31,17,79,93,就有

$$97+71+13+39=31+17+79+93,$$
$$97^2+71^2+13^2+39^2=31^2+17^2+79^2+93^2,$$
$$97^3+71^3+13^3+39^3=31^3+17^3+79^3+93^3;$$

洛书中另一组 2,6,8,4 顺时针构成 2 位数 26,68,84,42,逆时针构成 2 位数 24,48,86,62,也有

$$26+68+84+42=24+48+86+62,$$
$$26^2+68^2+84^2+42^2=24^2+48^2+86^2+62^2,$$
$$26^3+68^3+84^3+42^3=24^3+48^3+86^3+62^3.$$

1989 年,帕佩斯(T • Pappas)在所著《数学乐趣》中指出[6]用斐波那契(Fibonacci)数列中连续的 9 个数列 3,5,8,13,21,34,55,89,144 顺序代替洛书中 1 ~9 得到

$$\begin{pmatrix} 13 & 144 & 5 \\ 8 & 21 & 55 \\ 89 & 3 & 34 \end{pmatrix},$$

其每行 3 数相乘,3 行乘积之和为

$$13\times144\times5+8\times21\times55+89\times3\times34=26\ 678;$$

每列 3 数相乘,3 列乘积之和为

$$13\times8\times89+144\times21\times3+5\times55\times34=26\ 678.$$

结果相等.

2008 年,笔者指出[8]斐波那契数列中任意连续的 9 个数列顺序代替洛书中 1 ~9 得到的矩阵就有每行 3 数相乘,3 行乘积之和等于每列 3 数相乘,3 列乘积之和.

此外,吴鹤龄[6]等人的工作都值得称道.

现在笔者指出洛书的一个新性质:洛书中每行 3 数相乘,3 行乘积之和

$$R=2\times9\times4+4\times5\times3+6\times1\times8=225$$

等于每列 3 数相乘,3 列乘积之和

$$T=2\times7\times6+9\times5\times1+4\times3\times8=225.$$

为了深入探讨这一新性质,引进一个概念.

定义　任意数列 $a_1,a_2,\cdots,a_9$ 依次代替洛书中 1,2,…,9 得到

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_2 & a_9 & a_4 \\ a_7 & a_5 & a_3 \\ a_6 & a_1 & a_8 \end{pmatrix},$$

称 $\boldsymbol{A}$ 为洛书的对应矩阵,简称对应矩阵.

还要引进 2 个记号. 对应矩阵 $\boldsymbol{A}$ 中每行 3 数相乘,3 行乘积之和,记为 $R(\boldsymbol{A})$,即 $R(\boldsymbol{A})=a_2a_9a_4+a_7a_5a_3+a_6a_1a_8$;每列 3 数相乘,3 列乘积之和,记为 $T(\boldsymbol{A})$,即 $T(\boldsymbol{A})=a_2a_7a_6+a_9a_5a_1+a_4a_3a_8$.

下面建立对应矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的重要结果.

洛书定理　任意数列 $a_1,a_2,\cdots,a_9$ 组成行列式

$$\boldsymbol{D}=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_4 & a_5 & a_6 \\ a_7 & a_8 & a_9 \end{vmatrix}$$

与洛书的对应矩阵

$$A=\begin{pmatrix} a_2 & a_9 & a_4 \\ a_7 & a_5 & a_3 \\ a_6 & a_1 & a_8 \end{pmatrix}$$

存在关系式

$$T(\boldsymbol{A})-R(\boldsymbol{A})=\boldsymbol{D},$$

其中 $T(\boldsymbol{A})$表示 $\boldsymbol{A}$ 中每列 3 数相乘，3 列乘积之和；$R(\boldsymbol{A})$表示 $\boldsymbol{A}$ 中每行 3 数相乘，3 行乘积之和.

证明 行列式按行展开得到

$$\boldsymbol{D}=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_4 & a_5 & a_6 \\ a_7 & a_8 & a_9 \end{vmatrix}=a_1\begin{vmatrix} a_5 & a_6 \\ a_8 & a_9 \end{vmatrix}-a_2\begin{vmatrix} a_4 & a_6 \\ a_7 & a_9 \end{vmatrix}+a_3\begin{vmatrix} a_4 & a_5 \\ a_7 & a_8 \end{vmatrix}=$$

$$a_1(a_5a_9-a_6a_8)-a_2(a_4a_9-a_6a_7)+a_3(a_4a_8-a_5a_7)=T(\boldsymbol{A})-R(\boldsymbol{A}).$$

推论 当 $R(\boldsymbol{A})=T(\boldsymbol{A})$的充要条件为 $\boldsymbol{D}=0$.

由此可知，洛书是由 1 ~ 9 组成，由于行列式

$$\boldsymbol{D}=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}=0,$$

所以洛书就有 $R=T$.

3 性质与举例

洛书定理的应用可分为 2 种类型，第 1 类型的对应矩阵既是非正规幻方，又有 $R(\boldsymbol{A})=T(\boldsymbol{A})$性质.

性质 1 等差数列 $a_1,a_2,\cdots,a_9$ 的对应矩阵为非正规幻方，以及 $R(\boldsymbol{A})=T(\boldsymbol{A})$.

证明 设等差数列首项为 a，公差为 d，$a_1=a$，$a_2=a+d$，$\cdots$，$a_9=a+8d$，代入对应矩阵，就有

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a+d & a+8d & a+3d \\ a+6d & a+4d & a+2d \\ a+5d & a & a+7d \end{pmatrix},$$

由于 $\boldsymbol{A}$ 中每行、每列以及左右对角线上 3 数相加等于 $3a+12d$，所以 $\boldsymbol{A}$ 为非正规幻方.

关于证明 $R(\boldsymbol{A})=T(\boldsymbol{A})$有 2 种方法.

第 1 法 通过实际计算得到

$$R(\boldsymbol{A})=(a+d)(a+8d)(a+3d)+(a+6d)(a+4d)(a+2d)+(a+5d)a(a+7d)=$$
$$3a^3+36a^2d+114ad^2+72d^3,$$
$$T(\boldsymbol{A})=(a+d)(a+6d)(a+5d)+(a+8d)(a+4d)a+(a+3d)(a+2d)(a+7d)=$$
$$3a^3+36a^2d+114ad^2+72d^3,$$

所以 $R(\boldsymbol{A})=T(\boldsymbol{A})$.

第 2 法 应用行列式性质，计算

$$\boldsymbol{D}=\begin{vmatrix} a & a+d & a+2d \\ a+3d & a+4d & a+5d \\ a+6d & a+7d & a+8d \end{vmatrix},$$

从第 3 行减去第 2 行，又从第 2 行减去第 1 行，得到

$$\boldsymbol{D}=\begin{vmatrix} a & a+d & a+2d \\ 3d & 3d & 3d \\ 3d & 3d & 3d \end{vmatrix}=0,$$

应用洛书定理得到 $R(\boldsymbol{A})=T(\boldsymbol{A})$.

现举已知的 2 例[6]作为性质 1 的应用.

例 1 在素数表中相邻两素数的间距大于 9 的第 1 对素数是 113 与 127. 现在选取从 114 ~ 122 的 9 个连续数时，得到对应矩阵

$$A=\begin{pmatrix}115 & 122 & 117\\ 120 & 118 & 116\\ 119 & 114 & 121\end{pmatrix},$$

$\boldsymbol{A}$ 是一个已知的非正规幻方,现在还有 $R(\boldsymbol{A})=T(\boldsymbol{A})$ 的性质.

例 2　由 9 个素数组成等差数列 199,409,619,829,1 039,1 249,1 459,1 669,1 879 得到对应矩阵

$$A=\begin{pmatrix}409 & 1\,879 & 829\\ 1\,459 & 1\,039 & 619\\ 1\,249 & 199 & 1\,669\end{pmatrix}.$$

这里 $\boldsymbol{A}$ 也是一个已知的非正规幻方,现在补充 $R(\boldsymbol{A})=T(\boldsymbol{A})$ 的性质.

性质 2　数列 $a_1=a$,$a_2=a+b$,$a_3=a+2b$,$a_4=a+c$,$a_5=a+b+c$,$a_6=a+2b+c$,$a_7=a+2c$,$a_8=a+b+2c$,$a_9=a+2b+2c$,其中 a,b,c 为任意数,对应矩阵

$$A=\begin{pmatrix}a_2 & a_9 & a_4\\ a_7 & a_5 & a_3\\ a_6 & a_1 & a_8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a+b & a+2b+2c & a+c\\ a+2c & a+b+c & a+2b\\ a+2b+c & a & a+b+2c\end{pmatrix}$$

为非正规幻方以及 $R(\boldsymbol{A})=T(\boldsymbol{A})$.

证明　对应矩阵 $\boldsymbol{A}$ 中每行、每列以及左右对角线上 3 数之和等于 $3(a+b+c)$,所以 $\boldsymbol{A}$ 为非正规幻方.

由数列组成的行列式

$$D=\begin{vmatrix}a & a+b & a+2b\\ a+c & a+b+c & a+2b+c\\ a+2c & a+b+2c & a+2b+2c\end{vmatrix}.$$

从 $\boldsymbol{D}$ 的第 2 行减去第 1 行,又从第 3 行减去第 1 行后,新出现的第 2 行与第 3 行各项成正比,所以 $\boldsymbol{D}=0$.

应用洛书定理得到对应矩阵 $\boldsymbol{A}$ 中具有 $R(\boldsymbol{A})=T(\boldsymbol{A})$ 的性质.

例 3　尼尔逊(H·Nelson)用计算机得到由 $a=1\,480\,028\,129$,$b=12$,$c=30$ 组成上述 9 个素数的对应矩阵[6]

$$A=\begin{pmatrix}1\,480\,028\,141 & 1\,480\,028\,213 & 1\,480\,028\,159\\ 1\,480\,028\,189 & 1\,480\,028\,171 & 1\,480\,028\,153\\ 1\,480\,028\,183 & 1\,480\,028\,129 & 1\,480\,028\,201\end{pmatrix}$$

为非正规幻方以及 $R(\boldsymbol{A})=T(\boldsymbol{A})$.

这里 $\boldsymbol{A}$ 是一个已知的非正规幻方,现在发现还有 $R(\boldsymbol{A})=T(\boldsymbol{A})$ 的性质.

第 2 类的对应矩阵不一定是幻方,但有 $R(\boldsymbol{A})=T(\boldsymbol{A})$ 的性质.

最简单的例子是几何数列 $a_1,a_2,\cdots,a_9$ 的对应矩阵 $\boldsymbol{A}$ 中就有 $R(\boldsymbol{A})=T(\boldsymbol{A})$.

最有趣的是下面的结果.

性质 3　数列 $a_1,a_2,\cdots,a_9$,从第 3 项开始,每一项等于前面相邻 2 项之和,数列的对应矩阵

$$A=\begin{pmatrix}a_2 & a_9 & a_4\\ a_7 & a_5 & a_3\\ a_6 & a_1 & a_8\end{pmatrix}$$

就有 $R(\boldsymbol{A})=T(\boldsymbol{A})$.

证明　数列 $a_1,a_2,\cdots,a_9$ 组成的行列式

$$D=\begin{vmatrix}a_1 & a_2 & a_3\\ a_4 & a_5 & a_6\\ a_7 & a_8 & a_9\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a_1 & a_2 & a_1+a_2\\ a_4 & a_5 & a_4+a_5\\ a_7 & a_8 & a_7+a_8\end{vmatrix},$$

这里第 3 列是第 1 列与第 2 列之和,所以 $\boldsymbol{D}=0$. 根据洛书定理知道对应矩阵 $\boldsymbol{A}$ 中应有 $R(\boldsymbol{A})=T(\boldsymbol{A})$.

数论上有 2 个著名的数列,一个是斐波那契(Fibonacci)数列 1,1,2,3,5,8,13, …;另一个是鲁卡斯(Lucas)数列 2,1,3,4,7,11,18,29,…. 它们都是从第 3 项开始,任一项等于前面相邻 2 项之和.

例 4　斐波那契数列或鲁卡斯数列中任取连续的 9 项组成的对应矩阵 $\boldsymbol{A}$ 中都有 $R(\boldsymbol{A})=T(\boldsymbol{A})$.

这里“任取连续的 9 项”可以大大减弱，从性质 3 的证明中能够得到启发.

以下性质为最一般的结论.

性质 4 假设线性方程组

$$a_1x+a_2y+a_3z=0,$$
$$a_4x+a_5y+a_6z=0,$$
$$a_7x+a_8y+a_9z=0$$

有非零解时，由数列 $a_1,a_2,\cdots,a_9$ 的对应矩阵 $\boldsymbol{A}$ 中就有 $R(\boldsymbol{A})=T(\boldsymbol{A})$.

证明 因为线性方程组有非零解的充要条件是 $a_1,a_2,\cdots,a_9$ 组成的行列式 $\boldsymbol{D}=0$，应用洛书定理得到对应矩阵 $\boldsymbol{A}$ 必有 $R(\boldsymbol{A})=T(\boldsymbol{A})$.

4 附 注

艾伦・塔尔(Allen Tarr)发现洛书中 9 个数蕴藏着一个有趣的性质.

把洛书中 9 个数分成 3 组(如图 3)，第 1 组是(主)对角线下方的 3 个数，用带箭头的弧线表示为 381，第 2 组是对角线上的 3 个数，用带箭头的直线表示为 654，第 3 组是对角线上方的 3 个数，用带箭头的弧线表示为 729，最后把以上 3 组数全部连接起来得到 381 654 729.

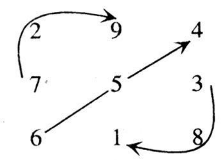


图 3 带箭头洛书图

该数具有的特性：最前面的 1 位数是 3 显然被 1 整除，前 2 位数是 38 能被 2 整除，前 3 位数能被 3 整除，前 4 位数能被 4 整除，如此继续下去，直至这个 9 位数能被 9 整除.

这是数字上罕见的现象!

参考文献:

[1] 耿济. 数学娱乐(一)——夫妻问题的新解与应用[J]. 海南大学学报：自然科学版，2007，25(4)：321－324.
[2] 耿济. 数学娱乐(二)——牙牌问题的新证与推广[J]. 海南大学学报：自然科学版，2008，26(3)：216－219.
[3] 徐桂芳，曹敏谦. 纯幻方的构造原理和方法[M]. 西安：西安交通大学出版社，1994：1.
[4] 王梓坤. 科学发现纵横谈[M]. 上海：上海人民出版社，1995：114.
[5] 夏鼐. 考古学和科技史[M]. 北京：科学出版社，1979：67.
[6] 吴鹤龄. 幻方及其他[M]. 北京：科学出版社，2004：5－9，13，97－99，149－150.
[7] 李学数. 数学和数学家的故事[M]. 第 4 集. 北京：新华出版社，1999：190－191.
[8] 耿济. 洛书与斐波那契数列的关系[J]. 数学通报，2008(5)：46－47，49.

Mathematical Recreation(Ⅲ): Luoshu Theorem and Its Application

GENG Ji
(College of Sciences and Engineering, Hainan University, Haikou, 570228, China)

Abstract: The age of Luoshu was discovered by archaeology. At same time, the Luoshu theorem and its applications were obtained.

Key words: Luoshu; corresponding matrix; luoshu theorem