文章编号:1004－1729(2005)01－0021－05

关于 $f\times f$ 与 f 的动力性质间关系的研究

黎日松
(湛江海洋大学 理学院,广东 湛江 524088)

摘 要:利用伪轨跟踪性质和一些其他方法,研究了紧系统$(X\times X,f\times f)$和(X,f)的动力性质间的关系,有些结果推广了文献[1～5]、[7～9]中的相应结果.

关键词:伪轨跟踪性质;拓扑可迁;拓扑遍历;拓扑双重遍历;混沌
中图分类号:O 189.3 **文献标识码**:A

紧系统(X,f)有某个动力性质,紧系统$(X\times X,f\times f)$却不一定有此性质.如:f是遍历的,$f\times f$不一定是遍历的(见文献[6]).又如:f是拓扑遍历的,$f\times f$不一定是拓扑遍历的(见文献[8～9]).该文献虽已对拓扑遍历与拓扑双重遍历映射的性质进行研究,并得到一些结果,但对$(X\times X,f\times f)$与(X,f)的其他动力性质间的关系至今未见有讨论.

本文的主要结果是定理1、定理2、定理3、定理4及定理5.有关的概念及记号均可参见文献[2,4,5,8,9].

1 定理及证明

设(X,d)为无限个点的紧致度量空间,$f:X\to X$为连续映射,显然$(X\times X,d)$也是紧致度量空间,其中$d((x_1,y_1),(x_2,y_2))=\max\{d(x_1,x_2),d(y_1,y_2)\}$,文献[1]中指出:$d$与通常的积度量是等价的.

设$\{x_0,x_1,\cdots,x_n\}$为f的一个δ伪轨,$\{y_0,y_1,\cdots,y_n\}$为f的另一个δ伪轨,则$c_{(x_0,y_0)(x_n,y_n)}=\{(x_0,y_0),(x_1,y_1),\cdots,(x_n,y_n)\}$为$f\times f$的一个从$(x_0,y_0)$到$(x_n,y_n)$的长度为$n+1$的$\delta$伪轨.

引理1 f具有伪轨性质当且仅当$f\times f$具有伪轨性质.

证明 ⅰ)必要性 对$\forall\varepsilon>0$,设$\{(x_0,y_0),\cdots,(x_n,y_n)\}$为$f\times f$的任一$\delta$伪轨,则$\{x_0,x_1,\cdots,x_n\}$为$f$的$\delta$伪轨,$\{y_0,y_1,\cdots,y_n\}$也是$f$的$\delta$伪轨,由$f$具有伪轨性质,所以存在$\delta>0$,使得$f$的任一$\delta$伪轨$\{z_0,z_1,\cdots,z_n\}$能被某点$z\varepsilon$跟踪,于是$f$的$\delta$伪轨$\{x_0,x_1,\cdots,x_n\}$能被某点$x\varepsilon$跟踪,即$d(f^i(x),x_i)<\varepsilon,i=0,1,\cdots,n$,同理$\{y_0,y_1,\cdots,y_n\}$也能被某点$y\varepsilon$跟踪,即$d(f^i(x),y_i)<\varepsilon,i=0,1,\cdots,n,x,y\in X$.由$d((f\times f)^i(x,y),(x_i,y_i))=d((f^i(x),f^i(y)),(x_i,y_i))=\max\{d(f^i(x),x_i),d(f^i(y),y_i))\}<\varepsilon$,因此$\{(x_0,y_0),(x_1,y_1),\cdots,(x_n,y_n)\}$能被$(x,y)\varepsilon$跟踪.

收稿日期:2004－05－14
作者简介:黎日松(1967－),男,广东湛江人,湛江海洋大学理学院讲师,硕士.

ⅱ）充分性　对于 $\forall \varepsilon>0$，由于 $f\times f$ 具有伪轨性质，所以存在 $\delta>0$，使得对 $f\times f$ 的任一 δ 伪轨 $\{(y_0,z_0),(y_1,z_1),\cdots,(y_n,z_n)\}$ 能被某点 $(y,z)\varepsilon$ 跟踪. 设 $\{x_0,x_1,\cdots,x_n\}$ 为 f 的 δ 伪轨，则 $\{(x_0,x_0),(x_1,x_1),\cdots,(x_n,x_n)\}$ 为 $f\times f$ 的 δ 伪轨，由 $d((f\times f)^i(x,y),(x_i,x_i))=\max\{d(f^i(x),x_i),d(f^i(y),x_i)\}<\varepsilon$，从而 $d(f^i(x),x_i)<\varepsilon$，$d(f^i(y),x_i)<\varepsilon$，$i=0,1,\cdots,n$，因此 $\{x_0,x_1,\cdots,x_n\}$ 能被 x 和 $y\varepsilon$ 跟踪.

推论 1　若 X 局部连通，f 具有伪轨跟踪性质且 $f\times f$ 链可迁，则 $f\times f$ 是 Ruelle-Takens 意义下混沌的.

证明　由于 X 局部连通，所以 $X\times X$ 也是局部连通，由引理 1 及文献[7]中的定理 1.3 即可知结论成立.

定理 1　设 Λ 为 f 的 k 阶伪移位不变集，则 $\Lambda\times\Lambda$ 为 $f\times f$ 的 k^2 阶伪移位不变集.

证明　设 $S=\{0,1,\cdots,k-1\}$，则 $S\times S=\{(0,0),(0,1),\cdots,(0,k-1),(1,0),(1,1),\cdots,(1,k-1),\cdots,(k-1,0),(k-1,1),\cdots,(k-1,k-1)\}$，设 $h:\Lambda\to\sum_k$ 为连续满射，使得 $h\circ f|_\Lambda=\sigma\circ h$.

定义　$h:\Lambda\times\Lambda\to\sum_{k^2}=\sum_{S\times S}$ 为

$$h(x,y)=((p_0(h(x)),p_0(h(y))),\cdots,(p_i(h(x)),p_i(h(y))),\cdots),$$

其中 p_i 为第 $i+1$ 个坐标投射 $i=0,1,\cdots$，显然 h 是连续满射，因为

$$h\circ(f\times f)(x,y)=((p_0(h(f(x))),p_0(h(f(y))),(p_1(h(f(x))),p_1(h(f(y)))),\cdots)=$$
$$((p_0(\sigma(h(x))),p_0(\sigma(h(y)))),(p_1(\sigma(h(x))),p_0(\sigma(h(y)))),\cdots),$$

而

$$\sigma\circ h(x,y)=((p_1(h(x)),p_1(h(y))),(p_2(h(x)),p_2(h(y))),\cdots),$$

由于

$$p_i(\sigma(h(x)))=p_{i+1}(h(x)),p_i(\sigma(h(y)))=p_{i+1}(h(y)),i=0,1,2,\cdots,$$

于是有 $h\circ(f\times f)|_{\Lambda\times\Lambda}=\sigma\circ h$，其中 σ 为 $\sum_{S\times S}$ 的移位自映射. 因此定理得证.

引理 2　f 是拓扑混合的当且仅当 $f\times f$ 是拓扑混合的.

证明　ⅰ）必要性　设 U_1、V_1、U_2、V_2 为基元素，则存在自然数 N，使

$$K(U_1,V_1)\supset(N,+\infty),K(U_2,V_2)\supset(N,+\infty),$$

从而有

$$K(U_1\times U_2,V_1\times V_2)=\{n\text{ 为自然数}\mid(f\times f)^n(U_1\times U_2)\cap(V_1\times V_2)\neq\phi\}=$$
$$\{n\text{ 为自然数}\mid f^n(U_1)\times f^n(U_2)\cap(V_1\times V_2)\neq\phi\}=$$
$$\{n\text{ 为自然数}\mid(f^n(U_1)\cap V_1)\times(f^n(U_2)\cap V_2)\neq\phi\}\supset(N,+\infty),$$

所以 $f\times f$ 是拓扑混合的.

ⅱ）充分性　设 U、V 为基元素，则存在一个自然数 N，使得

$$K(U\times V,U\times V)\supset(N,+\infty),\text{即}$$
$$\{n\text{ 为自然数}\mid(f^n(U)\cap V)\times(f^n(U)\times V)\neq\phi\}\supset(N,+\infty),$$

所以 $K(U,V)\supset(N,+\infty)$.

定理 2　$P(f\times f)=P(f)\times P(f)$.

证明　设 $(x,y)\in P(f\times f)$ 且其周期为 n,则 $(f\times f)^n(x,y)=(f^n(x),f^n(y))=(x,y)$,于是 $f^n(x)=x$,$f^n(y)=y$,所以 $x,y\in P(f)$.

反之,设 $x,y\in P(f)$,且 x 的周期为 n_1,y 的周期为 n_2,则 $(f\times f)^{n_1n_2}(x,y)=(f^{n_1n_2}(x),f^{n_1n_2}(y))=(x,y)$,所以 $(x,y)\in P(f)$.

定理 3　若 X 连通,f 具有伪轨跟踪性质,且 f 的周期点在 X 中稠密,则

1) $f\times f$ 是 Ruelle-Takens 意义下混沌的;

2) $f\times f$ 是拓扑混合的;

3) $f\times f$ 具有性质 P;

4) f 是 Ruelle-Takens 意义下混沌的;

5) f 是拓扑混合的;

6) f 具有性质 P.

证明　由文献[2]的定理 3 及本文引理 1、定理 2 和性质:$\overline{A\times B}=\overline{A}\times\overline{B}$(见文献[1])即可证得.

定理 4　若 f 具有伪轨跟踪性质,X 连通,则以下性质两两等价:

1) $f\times f$ 具有满测度中心,即 $M(f\times f)=X\times X$;

2) f 具有满测度中心,即 $M(f)=X$;

3) 存在 $f\times f$ 的不变概率测度 $\mu_{f\times f}$,使得它的支撑 $\operatorname{supp}\mu_{f\times f}=X\times X$;

4) 存在 f 的不变概率测度 μ_f,使得其支撑 $\operatorname{supp}\mu_f=X$;

5) $CR(f\times f)=X\times X$;

6) $CR(f)=X$;

7) f 是拓扑混合的;

8) $f\times f$ 是拓扑混合的;

9) $f\times f$ 有一致正熵;

10) f 有一致正熵;

11) f 有完全正熵;

12) $f\times f$ 有完全正熵;

13) $f\times f$ 是拓扑弱混合的;

14) f 是拓扑弱混合的;

15) $f\times f$ 是链混合的;

16) f 是链混合的;

17) $f\times f$ 是拓扑可迁的;

18) f 是拓扑可迁的;

19) $f\times f$ 是链可迁的;

20) f 是链可迁的;

21) $f\times f$ 有性质 P;

22) f 有性质 P;

23) $f\times f$ 是 Ruelle-Takens 意义下混沌的;

24) f 是 Ruelle-Takens 意义下混沌的;

25) $f\times f$ 是链可迁的且对于 $\forall\ \delta>0$,存在 2 个周期互质的周期 δ 链;

26) f 是链可迁的且对于 $\forall\ \delta>0$,存在 2 个周期互质的周期 δ 链.

证明 由文献[4]的定理 1.1 及文献[7]的定理 1.4、本文引理 1、引理 2 即可证得.

推论 2 若 X 连通,f 具有伪轨跟踪性质,链可迁且 $P(f)\neq\phi$,则

1) $f\times f$ 是 Ruelle-Takens 意义下混沌的;

2) $f\times f$ 不是唯一遍历的;

3) $f\times f$ 有正拓扑熵.

证明 由文献[7]中的定理 1.2 及本文引理 1 即可证得.

推论 3 若 X 连通,f 具有伪轨跟踪性质,链可迁,则 $f\times f$ 或者是 Ruelle-Takens 意义下混沌的,或者是一致几乎周期的同胚且是严格遍历的.

证明 由文献[7]中的定理 1.1 及本文引理 1 即可证得.

定理 5 x_1,y_1 为 f 的稳定点当且仅当(x_1,y_1) 为 $f\times f$ 的稳定点.

证明 ⅰ) 必要性 设 x_1,y_1 为 f 的稳定点,则对于 $\forall\ \varepsilon>0$,存在 $\delta>0$,使得当 $d(x_1,x_2)<\delta$ 时,对 $\forall\ n\in N$,有 $d(f^n(x_1),f^n(x_2))<\varepsilon$,当 $d(y_1,y_2)<\delta$ 时,对 $\forall\ n\in N$,有 $d(f^n(y_1),f^n(y_2))<\varepsilon$,从而当 $d((x_1,y_1),(x_2,y_2))<\delta$ 时,有 $d((f\times f)^n(x_1,y_1),(f\times f)^n(x_2,y_2))=\max\{d(f^n(x_1),f^n(x_2)),d(f^n(y_1),f^n(y_2))\}<\varepsilon$,$\forall\ n\in N$,这是因为 $d((x_1,y_1),(x_2,y_2))<\delta$ 当且仅当 $d(x,x)<\delta$,$d(y,y)<\delta$,因此(x_1,y_1) 为 $f\times f$ 的稳定点.

ⅱ) 充分性 设(x_1,y_1)为$f\times f$的稳定点,则对 $\forall\ \varepsilon>0$,存在 $\delta>0$,使当 $d((x_1,y_1),(x_2,y_2))<\delta$ 时,对 $\forall\ n\in N$,有

$d((f\times f)^n(x_1,y_1),(f\times f)^n(x_2,y_2))=\max\{d(f^n(x_1),f^n(x_2)),d(f^n(y_1),f^n(y_2))\}<\varepsilon$,

从而当 $d(x_1,x_2)<\delta$ 时,对 $\forall\ n\in N$,有 $d(f^n(x_1),f^n(x_2))<\varepsilon$,当 $d(y_1,y_2)<\delta$ 时,对 $\forall\ n\in N$,有 $d(f^n(y_1),f^n(y_2))<\varepsilon$,因此 x_1,y_1 为 f 的稳定点.

注记 1) f 是敏感依赖于初始条件的当且仅当$f\times f$ 是敏感依赖于初始条件的. 2) 称 $\{x\mid x$ 为f 的稳定点$\}$ 为 f 的稳定集,记为 $S(f)$.则有 $S(f\times f)=S(f)\times S(f)$.

推论 4 若$\overline{P(f)}=X$,则下列几条是等价的:

1) $\forall\ n,m\in N,(f^{(m)})^n$ 拓扑双重遍历;

2) $f^{(m)}$ 拓扑双重遍历;

3) $f^{(m)}$ 全遍历;

4) $f^{(m)}$ 拓扑弱混合;

5) $f^{(m)}$ 全可迁.

证明 由文献[9]的系 3 及本文定理 2 即可证得.

注记 推论 4 是文献[9]中的系 3 的推广.

推论 5 设$f:X\to X$为连通的紧致度量空间X上的连续满射且具有伪轨跟踪性质,若f有一致正熵,则 $f\times f$ 是全遍历的.

证明　由文献[8] 中定理 2 及本文引理 1、定理 4 即可证得.

注记　推论 5 是文献[8] 中的定理 2 的进一步加强.

(笔者衷心感谢左再思教授、沈文淮教授的热情鼓励和悉心指导,也衷心感谢南京大学数学系代雄平副教授的有益建议.)

参考文献:

[1] 熊金城. 点集拓扑讲义[M]. 北京:高等教育出版社,1997.
[2] 扬润生. 伪轨跟踪与混沌[J]. 数学学报,1996,39(3):382－386.
[3] 扬润生. 伪轨跟踪与伪位移不变集[J]. 数学年刊 A,1997,18(5):617－622.
[4] 扬润生. 伪轨跟踪与一致正熵[J]. 数学年刊 A,1996,17(4):411－414.
[5] 周作领. 弱几何周期点和测度中心[J]. 中国科学 A,1992,(6):572－581.
[6] WALTER P. An introduction to ergodic theory[M]. New York:Spring-Verlag, New York, Inc, 1982.
[7] 扬润生. 伪轨跟踪性质与不变概率测度[J]. 数学年刊 A,1998,19(1):33－36.
[8] 扬润生. 拓扑遍历映射[J]. 数学学报,2001,44(6):1 063－1 086.
[9] 扬润生. 拓扑遍历与拓扑双重遍历[J]. 数学学报,2003,46(3):555－560.

Research on the Relations Between the Dynamical Properties of $f\times f$ and f

LI Ri-song
(School of Science, Zhanjing Ocean University, Zhanjiang 524088, China)

Abstract: In this paper, we use the pseudo-orbit tracing property and some other ways to study the relations between the dynamical properties of compact system $(X\times X, f\times f)$ and (X, f). Some results extend the corresponding results in [1—5] and [7—9].

Key words: pseudo-orbit tracing property; topological transitiveness; topological ergodicity; topological double ergodicity; chaos